



RÉSUMÉ

DES

LEÇONS D'ANALYSE

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.


PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT
Rue Racine 28, près de l'Odéon.

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS D'ANALYSE

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PAR M. NAVIER,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, INSPECTEUR DIVISIONNAIRE DES PONTS ET CHAUSSÉES ETC.

SUIVI DE NOTES,

PAR M. J. LIOUVILLE,

Membre de l'Institut (Académie des sciences), professeur à l'École Polytechnique



COURS DE 2e ANNÉE.



PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET Vr DALMONT,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1840.



TABLE

DES MATIÈRES.

COURS DE LA DEUXIÈME ANNÉE.

NOTES.

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS D'ANALYSE

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

XXX. Intégrales définies. — différentiation et intégration sous le signe $\int$.

342. Soit une intégrale définie telle que

$$\int_a^b f(\alpha).d\alpha,$$

α étant la variable, $f(\alpha)$ une fonction quelconque de α, a et b deux constantes. Cette formule est regardée, conformément à ce que l'on a vu dans l'article XXVIII, comme présentant une valeur constante déterminée : on s'en forme une idée très-nette, en concevant qu'elle exprime l'aire de la courbe dont α serait l'abscisse, et $f(\alpha)$ l'ordonnée, cette aire étant comprise entre l'axe des abscisses, la courbe, et les ordonnées correspon-

dantes aux abscisses $\alpha=a$ et $\alpha=b$. On pourra toujours obtenir d'une manière exacte ou approchée la valeur de la formule dont il s'agit, à l'exception des cas où l'ordonnée $f(\alpha)$ deviendrait infinie pour une ou plusieurs valeurs de α comprises entre les limites a et b : ces cas exigent le plus souvent un examen spécial.

343. Nous remarquerons maintenant qu'une intégrale définie peut être considérée sous un point de vue plus étendu, en admettant que la fonction désignée par $f(\alpha)$ contienne une quantité variable x. L'expression précédente devient alors une fonction variable de x, dont la valeur dépend de la forme de la fonction $f(\alpha)$, et des limites a, b. En effet, lorsque l'intégration définie indiquée par rapport à α est effectuée, cette quantité α a disparu, et il ne reste plus qu'une fonction contenant la seule variable x.

La variable x pourrait être aussi contenue dans l'expression des limites désignées par a et b. Ainsi l'expression générale d'une intégrale définie représentant une fonction de x est

$$X=\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . f(x,\alpha).$$

344. Proposons-nous de différentier cette nouvelle espèce de fonction, c'est-à-dire de connaître l'accroissement dX correspondant à l'accroissement infiniment petit dx de la variable. En supposant d'abord que les limites de l'intégrale définie soient les constantes a et b, on aura

$$X+dX=\int_{a}^{b} d\alpha \left[f(x,\alpha)+\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}dx\right];$$

et

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx}=\int_a^b d\alpha.\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}.$$

Si nous admettons maintenant que les limites soient φx et ψx, nous aurons

$$\mathrm{X}+d\mathrm{X}=\int_{\varphi x+\frac{d.\varphi x}{dx}dx}^{\psi x+\frac{d.\psi x}{dx}dx} d\alpha\left[f(x,\alpha)+\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}dx\right],$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{X}+d\mathrm{X}=\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha\left[f(x,\alpha)+\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}\right]-\left[f(x,\varphi x)+\frac{d.f(x,\varphi x)}{dx}dx\right].\frac{d.\varphi x}{dx}dx$$
$$+\left[f(x,\psi x)+\frac{d.f(x,\psi x)}{dx}dx\right].\frac{d.\psi x}{dx}dx;$$

d'où, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre,

$$d\mathrm{X}=\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha.\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}dx-f(x,\varphi x).\frac{d.\varphi x}{dx}dx+f(x,\psi x)\frac{d.\psi x}{dx}dx;$$

et par conséquent

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx}=\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha.\frac{d.f(x,\alpha)}{dx}-f(x,\varphi x).\frac{d.\varphi x}{dx}+f(x,\psi x).\frac{d.\psi x}{dx}.$$

345. Le résultat précédent devient très-sensible lorsqu'on se représente l'intégrale définie

$$\mathrm{X}=\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha.f(x,\alpha),$$

comme exprimant l'aire PMNQ (*fig.* 54) de la courbe

MN dont l'ordonnée est $f(x,\alpha)$, cette aire étant prise entre les abscisses $\mathrm{OP}=\varphi(x)$ et $\mathrm{OQ}=\psi(x)$. 1° Par la seule variation de x dans $f(x,\alpha)$, la courbe se transporte en mn, et l'aire augmente de l'espace MmnN représenté par $\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . \frac{d.f(x,\alpha)}{dx} dx$. 2° Par la seule variation de x dans la limite inférieure $\varphi(x)$, l'aire diminue de l'espace PMP′ représenté par $f(x,\varphi x) . \frac{d.\varphi x}{dx} dx$. 3° Enfin par la seule variation de x dans la limite supérieure $\psi(x)$, l'aire augmente de l'espace QNQ′ représenté par $f(x,\psi x) . \frac{d.\psi x}{dx} dx$. La variation simultanée de x dans les trois fonctions $f(x,\alpha)$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ change d'ailleurs l'aire PMNQ en P′M′N′Q′. La variation totale de cette aire est donc exprimée par les trois termes de la formule précédente, lorsqu'on néglige les espaces MmM′ et NnN′ qui sont infiniment petits du second ordre.

346. On voit par ce qui précède, qu'ayant l'égalité

$$\mathrm{X} = \int_a^b d\alpha . f(x,\alpha),$$

les limites a, b étant supposées constantes, on obtient le coefficient différentiel du premier ordre de la fonction X en remplaçant sous le signe $\int$ la fonction $f(x,\alpha)$ par le coefficient différentiel du premier ordre de cette fonction pris par rapport à x. Il est facile d'en conclure que si l'on multiplie les deux membres de cette même égalité par dx, et si l'on intègre de part et d'autre, on aura

$$\int X.dx = \int_a^b d\alpha . \int dx . f(x,\alpha).$$

Ces différentiations et intégrations sous le signe d'intégrale définie donnent le moyen de déterminer les valeurs de certaines intégrales, en partant des valeurs d'autres intégrales déjà connues.

Détermination de quelques intégrales définies.

347. La détermination des valeurs des intégrales définies, et l'étude des relations qui existent entre ces valeurs, ont beaucoup occupé les géomètres; mais nous ne pouvons présenter sur ce sujet que quelques aperçus.

Lorsque l'intégration indéfinie de la fonction qui se trouve sous le signe $\int$ peut être effectuée, la valeur de l'intégrale définie proposée s'en déduit immédiatement. Il suffira de citer quelques exemples très-simples d'intégrales obtenues de cette manière.

348. Puisque l'on a

$$\int dx.x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

on en conclut, en supposant l'exposant m positif et plus grand que l'unité,

$$\int_0^1 dx.x^m = \frac{1}{m+1} \quad \text{et} \quad \int^1 \frac{dx}{x^m} = \infty .$$

349. Les équations

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{ arc.tang. } \frac{x}{a},$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc.sin. } \frac{x}{a},$$
$$\int dx.e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a},$$

donnent

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a},$$
$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^\infty dx.e^{ax} = \infty, \int_0^\infty dx.e^{-ax} = \frac{1}{a}.$$

Comme l'on a, en intégrant par parties,

$$\int dx.x^{a-1}.e^{-x} = -x^{a-1}.e^{-x} + (a-1) \int dx.x^{a-2}.e^{-x},$$

on trouve, lorsque a est un nombre entier positif,

$$\int_0^\infty dx.x^{a-1}.e^{-x} = 1.2.3.4.........(a-1).$$

350. Les équations

$$\int dx.\text{sin. } ax = -\frac{\text{cos. } ax}{a}, \qquad \int dx.\text{cos. } ax = \frac{\text{sin. } ax}{a},$$

donnent

$$\int_0^\pi dx.\text{ sin.} ax = \frac{1-\text{cos.} a\pi}{a}, \qquad \int_0^\pi dx.\text{cos.} ax = \frac{\text{sin.} a\pi}{a}.$$

Ainsi la valeur de la première intégrale est $\frac{2}{a}$ lorsque a

est un nombre entier impair, et zéro lorsque a est un nombre entier pair. La seconde intégrale est toujours égale à zéro lorsque a est un nombre entier.

351. Les équations

$$\int dx.x\sin.ax = -\frac{x\cos.ax}{a} + \frac{\sin.ax}{a^2},$$

$$\int dx.x\cos.ax = \frac{x\sin.ax}{a} + \frac{\cos.ax}{a^2},$$

donnent

$$\int_0^\pi dx.x\sin.ax = -\frac{\pi\cos.a\pi}{a},$$

$$\int_0^\pi dx.x\cos.ax = \frac{\cos.a\pi - 1}{a^2}.$$

Par conséquent, suivant que a est entier impair ou entier pair, la première intégrale est $+\frac{\pi}{a}$ ou $-\frac{\pi}{a}$; et la seconde intégrale est $-\frac{a^2}{2}$ ou 0.

352. Des équations

$$\int dx.\sin.^2x = -\frac{\sin.x.\cos.x}{2} + \frac{1}{2}x,$$

$$\int dx.\cos.^2x = \frac{\sin.x.\cos.x}{2} + \frac{1}{2}x,$$

on déduit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^2x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\cos.^2x = \frac{\pi}{4};$$

et en général, les formules de réduction données n° 294,

$$\int dx.\sin.^m x = -\frac{\sin.^{m-1}x.\cos.x}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx.\sin.^{m-2}x,$$

$$\int dx.\cos.^m x = \frac{\sin.x.\cos.^{m-1}x}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx.\cos.^{m-2}x,$$

conduisent aux résultats suivants : 1° lorsque m est un nombre entier pair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^m x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\cos.^m x = \frac{1.3.5.\ldots.(m-1)}{2.4.6.\ldots.\ m}\frac{\pi}{2},$$

2° lorsque m est un nombre entier impair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^m x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\cos.^m x = \frac{2.4.6.\ldots.(m-1)}{3.5.7.\ldots.\ m}.$$

On peut remarquer que les valeurs des intégrales définies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^m x, \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\cos.^m x,$$

tendent l'une et l'autre vers zéro à mesure que le nombre m augmente, que ce nombre soit pair ou impair. Donc le rapport de ces valeurs a pour limite l'unité; d'où l'on conclut

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots\ldots}.$$

Cette expression très-remarquable du nombre π a été donnée par Wallis.

353. Les équations

$$\int dx.e^{-ax}.\sin.bx = e^{-ax}.\frac{-a\sin.bx - b\cos.bx}{a^2+b^2},$$

$$\int dx.e^{-ax}.\cos.bx = e^{-ax}.\frac{b\sin.bx - a\cos.bx}{a^2+b^2},$$

qui se déduisent du n° 292, donnent

$$\int_0^\infty dx.e^{-ax}.\sin.bx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty dx.e^{-ax}.\cos.bx = \frac{a^2+b^2}{a};$$

et l'on peut remarquer qu'à mesure que la quantité désignée par x approche de devenir égale à zéro, ces expressions approchent de plus en plus des limites $\frac{1}{b}$ et zéro. Néanmoins les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty dx.\sin.bx, \quad \text{et} \quad \int_0^\infty dx.\cos.ax$$

sont nécessairement indéterminées.

354. Il serait superflu de multiplier ces exemples, puisque dans des cas semblables la recherche dont il s'agit n'offre pas de difficultés. Mais les géomètres ont déterminé, dans les cas même où la fonction sous le signe $\int$ ne peut être intégrée, les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies. Les méthodes employées pour cette détermination consistent principalement : 1° à déduire les valeurs des intégrales cherchées d'autres intégrales déjà connues, au moyen de la différentiation ou de l'intégration sous le signe $\int$; 2° à trouver entre la fonction que représente l'intégrale proposée et ses différentielles des relations qui en font connaître la nature; 3° à passer des expressions réelles aux expressions imaginaires. La considération des intégrales doubles a également fait connaître plusieurs résultats importants. Nous présenterons quelques exemples propres à donner une idée des méthodes dont il s'agit.

355. Si dans l'équation donnée n° 348,

$$\int_0^1 dx.x^{m-1} = \frac{1}{m},$$

où nous supposerons m plus grand que l'unité, on multiplie les deux membres par dm, et que l'on intègre à partir de $m=n$, conformément à ce qu'on a vu n° 346, on trouvera

$$\int_0^1 dx\,\frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{lx}=l\frac{m}{n}.$$

356. Reprenons les équations du n° 353,

$$\int_0^\infty dx.e^{-ax}\sin.bx=\frac{b}{a^2+b^2},\qquad \int_0^\infty dx.e^{-ax}\cos.bx=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

Multipliant par da, et intégrant par rapport à a depuis $a=c$, il viendra

$$\int_0^\infty dx.\frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\sin.bx=\text{arc. tang.}\frac{a}{b}-\text{arc. tang.}\frac{c}{b}=\text{arc. tang.}\frac{b(a-c)}{b^2+ac},$$

$$\int_0^\infty dx.\frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cos.bx=\frac{1}{2}\,l\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}.$$

357. Si l'on fait $c=o$ et $a=\infty$, ces dernières équations donnent

$$\int_0^\infty dx\frac{\sin.bx}{x}=\frac{\pi}{2},\qquad \text{et}\qquad \int_0^\infty dx\frac{\cos.bx}{x}=\infty.$$

Il est remarquable que l'intégrale $\int_0^\infty dx\,\frac{\sin.bx}{x}$ soit indépendante du nombre b. En effet, supposant $x=\frac{z}{b}$, cette intégrale se change en $\int_0^\infty dx\,\frac{\sin.z}{z}$, où b a disparu.

358. Soit l'intégrale

$$\int_0^\infty dx.e^{-x^2}.$$

En la multipliant par une autre intégrale pareille dans laquelle nous écrirons y au lieu de x, nous aurons

$$\int_0^\infty dy.e^{-y^2}.\int_0^\infty dx.e^{-x^2}=\int_0^\infty dy\int_0^\infty dx.e^{-(y^2+x^2)}.$$

Posons maintenant $y=xt$, t étant une nouvelle variable. Quelle que soit x entre les limites 0 et ∞, aux valeurs 0 et ∞ de y correspondront également des valeurs de 0 et ∞ de t; et l'on aura d'ailleurs $dy=xdt$. L'expression précédente se changera donc en

$$\int_0^\infty dt\int_0^\infty dx.x.e^{-(1+t^2)x^2}.$$

Effectuant d'abord l'intégration par rapport à x, elle deviendra

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+t^2}{dt};$$

et comme $\int\frac{dt}{1+t^2}=$ arc.tang. t, et par conséquent $\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$, nous aurons définitivement $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ pour la valeur du quarré de l'intégrale $\int_0^\infty dx.e^{-x^2}$. Donc

$$\int_0^\infty dx.e^{-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

expression très-remarquable, et fréquemment employée dans plusieurs applications de l'analyse.

359. Considérons maintenant l'intégrale

$$U=\int_0^\infty dx.\cos.rx.e^{-a^2x^2}.$$

Différentiant par rapport à r, on trouve

$$\frac{dU}{dr} = -\int_0^\infty dx.x\sin.rx.e^{-a^2x^2}.$$

Mais nous avons en intégrant par parties,

$$\int dx.x\sin.rx.e^{-a^2x^2} = -\frac{1}{2a^2}\sin.rx.e^{-a^2x^2} + \frac{r}{2a^2}\int dx.\cos.rx.e^{-a^2x^2},$$

d'où l'on déduit, puisque le terme hors du signe est nul aux deux limites 0 et ∞,

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{r}{2a^2}U.$$

Cette équation fait connaître la nature de la fonction U, qui est nécessairement

$$U = A.e^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

A désignant une constante. Ainsi nous avons

$$\int_0^\infty dx.\cos.rx.e^{-a^2x^2} = A.e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

Pour déterminer la constante A, on supposera $r=0$, ce qui donnera

$$\int_0^\infty dx.e^{-a^2x^2} = A.$$

Or de l'équation $\int_0^\infty dt.e^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, obtenue n° 359, on déduit en faisant $t=ax$, $\int_0^\infty dx.e^{-a^2x^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{\pi} = A$.
L'expression de l'intégrale proposée est donc définitivement

$$\int_0^\infty dx.\cos.rx.e^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

360. Soit encore l'intégrale

$$\int_0^\infty dx\frac{\cos.ax}{1+x^2},$$

et prenons d'abord pour la limite supérieure $\frac{2k\pi}{a}$, k désignant un nombre entier. En écrivant donc

$$U = \int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx\frac{\cos.ax}{1+x^2},$$

et différentiant deux fois de suite par rapport à a, conformément à la règle donnée n° 344, il viendra

$$\frac{dU}{da} = -\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx\frac{x\sin.ax}{1+x^2} + \frac{2k\pi}{a^2+4k^2\pi^2},$$

$$\frac{d^2U}{da^2} = -\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx\frac{x^2\cos.ax}{1+x^2} + \frac{4k\pi a}{(a^2+4k^2\pi^2)^2};$$

d'où l'on conclut

$$U - \frac{d^2U}{dx^2} = \int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx\cos.ax - \frac{4k\pi a}{(a^2+4k^2\pi^2)^2},$$

ou simplement (puisque l'intégrale du second membre a une valeur nulle),

$$U - \frac{d^2U}{da^2} = -\frac{4k\pi a}{(a^2+4k^2\pi^2)^2}.$$

Admettons maintenant que k soit un nombre infiniment

grand ; le second membre de cette équation deviendra infiniment petit. Par conséquent si U représente l'intégrale proposée, nous aurons

$$U = \frac{d^2U}{da^2}.$$

Cette équation détermine la nature de la fonction U, dont l'expression la plus générale est

$$Ae^{-a}+Be^{a},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. Mais il est visible que l'on doit faire $B=0$, puisque la valeur de l'intégrale proposée ne peut croître indéfiniment avec le nombre a. On a donc simplement

$$\int_0^\infty dx \frac{\cos ax}{1+x^2} = A.e^{-a}.$$

Pour déterminer la constante A, on supposera $a=0$, et comme $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} = A$, il vient définitivement

$$\int_0^\infty dx \frac{\cos.ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

361. Si l'on remplace dans cette équation x par $\frac{x}{m}$, et a par ma, elle se change en

$$\int_0^\infty dx \frac{\cos.ax}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m} e^{-ma};$$

et en différentiant par rapport à a, on a le résultat non moins remarquable

$$\int_0^\infty dx \frac{x \sin.ax}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ma}.$$

362. Pour donner un exemple de l'usage des imaginaires, nous prendrons l'intégrale

$$\int_{-}^{\infty} dx.\cos.2rx.e^{-x^2}.$$

En remplaçant cos. $2rx$ par sa valeur en exponentielles imaginaires, elle deviendra

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx.e^{-x^2+2rx\sqrt{-1}}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx.e^{-x^2-2rx\sqrt{-1}},$$

ou en multipliant et divisant par e^{-r^2}, afin de rendre les exposants de e sous le signe $\int$ des quarrés parfaits,

$$\frac{1}{2}e^{-r^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx.e^{-(x-r\sqrt{-1})^2}+\frac{1}{2}e^{-r^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx.e^{-(x+r\sqrt{-1})^2}.$$

Mais on a, comme on l'a vu n° 358,

$$\int_{0}^{\infty} dx.e^{-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \text{ et par conséquent } \int_{-\infty}^{\infty} dx.e^{-x^2}=\sqrt{\pi};$$

d'où l'on conclut

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx.e^{-(x+b)^2}=\sqrt{\pi},$$

quelle que soit la constante b. Donc si l'on fait $b=\pm r\sqrt{-1}$; l'expression précédente de l'intégrale proposée deviendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx.\cos.2rx.e^{-x^2}=\sqrt{\pi}.e^{-r^2},$$

et l'on aura par conséquent

$$\int_0^\infty dx.\cos.2rx.e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\,e^{-r^2}.$$

Ce résultat s'accorde avec celui qui a été obtenu n° 359.

XXXI. Conditions d'intégrabilité pour les fonctions différentielles du premier ordre a plusieurs variables indépendantes. — Intégration de ces fonctions lorsqu'elles satisfont aux conditions d'intégrabilité.

363. Considérons une fonction différentielle d'une seule variable telle que Xdx, X désignant une fonction contenant la variable x et des quantités constantes. La fonction Xdx pourra toujours être regardée comme la différentielle exacte d'une certaine fonction de x. En effet, ou Xdx sera la différentielle d'une fonction connue de x, et dans ce cas l'intégration s'effectuerait immédiatement, ou du moins l'on pourra effectuer cette intégration en développant la fonction X en série ordonnée suivant les puissances entières de la variable x, et prenant l'intégrale de chaque terme.

364. Soit maintenant une fonction différentielle du premier ordre de deux variables x, y, telle que $Pdx+Qdy$, où P, Q désignent des fonctions quelconques de x et y. Une telle fonction ne peut pas être regardée en général comme étant la différentielle exacte d'une fonction de x, y : cela n'a lieu qu'autant qu'il existe une certaine relation entre les quantités P et Q. En effet, soit U une fonction quelconque de x, y, la différentielle complète de U, c'est-à-dire l'accroissement de U correspondant

aux accroissements simultanés dx et dy de x et y, sera comme on l'a vu dans l'article IV,

$$dU = \frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy,$$

où $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$ représentent respectivement les coefficients différentiels de la fonction U pris en regardant x seule comme variable, et y seule comme variable. Il faut donc, pour que la fonction proposée $Pdx+Qdy$ résulte de la différenciation d'une fonction quelconque U, que l'on puisse écrire

$$P = \frac{dU}{dx}, \qquad Q = \frac{dU}{dy}.$$

Mais on a, comme on l'a vu nº 69, $\frac{d^2U}{dxdy} = \frac{d^2U}{dydx}$; donc on devrait avoir également

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},$$

équation qui exprime la relation qui doit subsister entre les fonctions P,Q pour que $P\,dx+Qdy$ soit la différentielle d'une fonction quelconque de x,y.

365. Si la fonction proposée est $Pdx+Q\,dy+Rdz$, où P,Q,R désignent des fonctions quelconques de x,y,z, on remarquera que U étant une fonction quelconque de x,y,z, on a

$$dU = \frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz.$$

Mais

$$\frac{d^2U}{dxdy} = \frac{d^2U}{dydx}, \qquad \frac{d^2U}{dxdz} = \frac{d^2U}{dzdx}, \qquad \frac{d^2U}{dydz} = \frac{d^2U}{dzdy}.$$

Donc la fonction proposée ne pourra être la différentielle d'une certaine fonction de x, y, z, à moins que les fonctions P, Q, R ne satisfassent aux conditions

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}, \qquad \frac{dP}{dz}=\frac{dR}{dx}, \qquad \frac{dQ}{dz}=\frac{dR}{dy}.$$

Et ainsi de suite s'il y avait un plus grand nombre de variables.

366. Lorsque les fonctions différentielles proposées satisfont aux conditions d'intégrabilité, on peut en obtenir l'intégrale de la manière suivante. Soit

$$dU=Pdx+Qdy;$$

l'intégrale U doit nécessairement être de la forme

$$U=\int Pdx+Y,$$

en désignant par Y une fonction de la variable y seule. Or, cette dernière équation donnerait :

$$\frac{dU}{dy}=\int\frac{dP}{dy}dx+\frac{dY}{dy},$$

quantité qui doit être égale à Q. Ainsi

$$\frac{dY}{dy}=Q-\int\frac{dP}{dy}dx,$$

et

$$Y=const.+\int dy\left(Q-\int dx\frac{dP}{dy}\right).$$

L'intégrale cherchée est donc

$$U=const.+\int dx.P+\int dy\left(Q-\int dx\frac{dP}{dy}\right).$$

367. On vérifie que ce procédé d'intégration suppose l'existence de la condition indiquée n° 364. En effet, pour que la quantité $Q - \int dx \frac{dP}{dy}$ soit une fonction de y seule, il faut que la différentielle de cette fonction prise par rapport à x soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = 0.$$

368. Soit pour exemple la fonction différentielle

$$\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}.$$

Comme nous avons

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-y.2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2+y^2-x.2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

la fonction proposée satisfait aux conditions d'intégrabilité. En suivant la méthode précédente, nous écrirons donc

$$U = \int \frac{ydx}{x^2+y^2} + Y = \text{arc. tang.} \frac{x}{y} + Y,$$

et

$$\frac{dU}{dy} = -\frac{x}{y^2+x^2} + \frac{dY}{dy}.$$

Mais en comparant avec la fonction proposée, on voit que $\frac{dY}{dy}$ doit être nulle. L'intégrale cherchée est donc simplement

$$U = const. + \text{arc tang.} \frac{x}{y}.$$

369. Soit encore proposée la différentielle

$$dU = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right).$$

Elle satisfait aux conditions d'intégrabilité, car l'on trouve

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Nous écrirons donc

$$U=\int dx.\frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)x}+Y,$$

qui se met facilement sous la forme

$$U=\int dx\left(\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{1}{x}\right)+Y,$$

et donne

$$U=\text{arc tang.}\frac{x}{y}+lx+Y.$$

On en déduit

$$\frac{dU}{dy}=-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{dY}{dy};$$

et en comparant avec la différentielle proposée,

$$-\frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)y}=-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{dY}{dy};$$

d'où

$$\frac{dY}{dy}=-\frac{1}{y}, \quad \text{et par conséquent} \quad Y=const.-ly.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$U=\text{arc tang.}\frac{x}{y}+l\frac{x}{y}+const.$$

370. Les mêmes considérations s'appliquent aux différentielles contenant trois ou un plus grand nombre de variables. Soit

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz,$$

une différentielle proposée satisfaisant aux conditions d'intégrabilité indiquées n° 365. L'intégrale U doit nécessairement être de la forme

$$U = \int Pdx + Y,$$

Y désignant ici une fonction des variables y et z seules. Cette équation donne comme ci-dessus,

$$\frac{dU}{dy} = \int \frac{dP}{dy}\, dx + \frac{dY}{dy},$$

quantité qui doit être égale à Q. Donc

$$\frac{dY}{dy} = Q - \int \frac{dP}{dy}\, dx, \qquad \text{et} \qquad Y = \int dy \left(Q - \int dx \frac{dP}{dy} \right) + Z,$$

Z désignant une fonction de la variable z seule. Ainsi l'on a

$$U = \int P dx + \int dy \left(Q - \int dx \frac{dP}{dy} \right) + Z,$$

et par conséquent

$$\frac{dU}{dz} = \int dx\, \frac{dP}{dz} + \int dy \left(\frac{dQ}{dz} - \int dx \frac{d^2P}{dydz} \right) + \frac{dZ}{dz}.$$

Cette dernière quantité devant être égale à R, la fonction Z est déterminée par l'équation

$$\frac{dZ}{dz} = R - \int dx \frac{dP}{dz} - \int dy \left(\frac{dQ}{dz} - \int dx \frac{d^2P}{dydz} \right),$$

ce qui donne

$$Z=const.+\int dz\left[R-\int dx\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right)\right].$$

Ainsi l'intégrale cherchée est

$$U=const.+\int dx.P+\int dy\left(Q-\int dx\frac{dP}{dy}\right)+$$
$$+\int dz\left[R-\int dx\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right)\right].$$

371. On vérifie encore ici que ce procédé d'intégration suppose l'existence des conditions d'intégrabilité indiquées n° 365. En effet, pour que la quantité

$$R-\int dx.\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right)$$

soit une fonction de z seule, il faut que les différentielles de cette fonction prises par rapport à x et par rapport à y soient nulles, conditions qui donnent

$$\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{d^2Q}{dzdx}-\frac{d^2P}{dydz}\right)=0,$$
$$\frac{dR}{dy}-\int dx.\frac{d^2P}{dzdy}-\frac{dQ}{dz}+\int dx\frac{d^2P}{dydz}=0.$$

Ces équations subsisteront si l'on a, comme dans le n° cité,

$$\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}=0,\quad \frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}=0,\quad \frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}=0.$$

372. Soit pour exemple la différentielle

$$dU=-\frac{2x(y^2-z^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy-\frac{2z}{x^2+z^2}dz.$$

Elle satisfait aux conditions d'intégrabilité : car on trouve

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{dP}{dz}=\frac{dR}{dx}=\frac{4xz}{(x^2+z^2)^2},\ \frac{dQ}{dz}=\frac{dR}{dy}=0.$$

Nous écrirons donc

$$U=-\int dx\ \frac{2x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)\ (x^2+z^2)}+Y,$$

qui revient à

$$U=\int dx\left(\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+z^2}\right)+Y,$$

c'est-à-dire

$$U=l(x^2+y^2)-l(x^2+z^2)+Y.$$

Cette expression donne

$$\frac{dU}{dy}=\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{dY}{dy},$$

et en comparant avec la fonction proposée, on voit que $\frac{dY}{dy}$ doit être nulle. Donc Y ne peut contenir que la variable z. On aurait alors

$$\frac{dU}{dz}=-\frac{2z}{x^2+z^2}+\frac{dY}{dz},$$

et en comparant encore avec la fonction proposée, on voit que $\frac{dY}{dz}$ doit être nulle. L'intégrale cherchée est donc simplement

$$U=l\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}+\textit{const.}$$

373. Soit encore pour exemple la différentielle

$$dU=-\frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dx}{x}+\frac{x^2+(y-z)^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dy}{z}+\frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dz}{z}-\frac{ydz}{z^2}+\frac{dz}{z^2}.$$

Elle satisfait aux conditions d'intégrabilité, car on trouve

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=\frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},\qquad \frac{dP}{dz}=\frac{dR}{dx}=\frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{dQ}{dz}=\frac{dR}{dy}=\frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\frac{1}{z^2}.$$

Nous poserons donc, conformément à la méthode précédente,

$$U=-\int dx\,\frac{x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)x}+Y,$$

qui revient à

$$U=\int dx\left(\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)+Y,$$

et donne par conséquent

$$U=lx-l(x^2+y^2+z^2)+Y.$$

On en déduit

$$\frac{dU}{dy}=-\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\frac{dY}{dy},$$

et la comparaison avec la différentielle proposée donne

$$\frac{x^2+(y-z)^2}{(x^2+y^2+z^2)z}=-\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\frac{dY}{dy},$$

d'où

$$\frac{dY}{dy}=\frac{1}{z},\qquad \text{et par conséquent}\qquad Y=\frac{y}{z}+Z.$$

Nous avons donc actuellement

$$U=lx-l(x^2+y^2+z^2)+\frac{y}{z}+Z.$$

Donc

$$\frac{dU}{dz}=-\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}-\frac{y}{z^2}+\frac{dZ}{dz};$$

et en comparant avec la différentielle proposée,

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)z}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{z^3}=-\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}-\frac{y}{z^2}+\frac{dZ}{dz},$$

d'où

$$\frac{dZ}{dz}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3},\quad \text{et par conséquent}\quad Z=lz-\frac{1}{2z^2}+const.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$U=l\frac{xz}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+const.$$

374. Il est superflu de remarquer que l'on parvient au même résultat quelle que soit la variable par laquelle on commence l'intégration. Si dans l'exemple précédent on veut commencer par la variable z, on écrira

$$U=\int dz\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)z}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right)+X,$$

X désignant une fonction de x et y seules. Cette équation revient à

$$U=\int dz\left(-\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right)+X,$$

ou

$$U=-l(x^2+y^2+z^2)+lz+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+X.$$

On en déduit

$$\frac{dU}{dx}=-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\frac{dX}{dx};$$

en comparant avec la fonction proposée l'on a

$$-\frac{x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)x}=-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\frac{dX}{dx},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dX}{dx}=\frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad X=lx+Y,$$

Y désignant une fonction de y seule. Nous avons donc maintenant

$$U=-l(x^2+y^2+z^2)+lz+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+lx+Y;$$

d'où

$$\frac{dU}{dy}=-\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{z}+\frac{dY}{dy},$$

et en comparant avec la fonction proposée, on voit que $\frac{dY}{dy}$ doit être nulle, ou que la fonction Y se réduit à une constante. La valeur complète de U est donc comme ci-dessus

$$U=l\frac{xz}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y}{z}-\frac{1}{2z^2}+\textit{const.}$$

375. Lorsque dans l'équation

$$dU=Pdx+Qdy,$$

le second membre est une différentielle exacte, U est une fonction des deux variables indépendantes x,y. Dans la géométrie on regardera cette fonction comme l'ordonnée d'une surface mesurée perpendiculairement au plan, dans lequel seront comptées les deux abscisses x et y. Mais il n'en est plus de même si la fonction différentielle $Pdx+Qdy$, ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité. L'équation dont il s'agit n'a plus alors aucun sens, puisqu'on ne peut plus la concevoir dérivée d'une relation analytique existante entre les trois quantités U,

x, y. On ne peut lui en donner un qu'en établissant une certaine relation entre les variables x et y, qui ne seront plus alors toutes deux indépendantes. Posant donc $y = \varphi(x)$, φ désignant une fonction entièrement arbitraire, l'équation proposée deviendra de la forme

$$dU = M dx,$$

M étant une fonction de x seule, contiendra la fonction arbitraire $\varphi(x)$ et son coefficient différentiel du premier ordre. L'équation $dU = M dx$ peut toujours être intégrée. La fonction U qui sera donnée par l'intégration, représentera l'ordonnée d'une courbe dont la projection sur le plan des x, y a pour équation $y = \varphi(x)$; et il est évident qu'à raison de l'indétermination de la fonction φ, il existe une infinité de courbes différentes auxquelles l'ordonnée U peut appartenir.

Ces notions s'étendront facilement aux cas où la fonction différentielle proposée contient un plus grand nombre de variables.

XXXII. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE A DEUX VARIABLES.

376. On comprend en général sous cette dénomination toute équation de la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

dans laquelle x est regardée comme la variable indépendante ; y comme une fonction variable dont la valeur dépend de celle de x ; et $\frac{dy}{dx}$ est le coefficient différentiel

du premier ordre de y, pris par rapport à x, c'est-à-dire le rapport des accroissements simultanés des deux variables x et y. Il s'agit de se former une idée de la relation qu'une telle équation établit entre ces deux variables.

Pour y parvenir, on remarque que l'équation proposée peut toujours être censée résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, en sorte que l'on en ait tiré

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y),$$

la fonction φ désignant une fonction qui peut en général présenter une ou plusieurs valeurs distinctes. Admettons en premier lieu, qu'elle ne présente qu'une seule valeur, et pour fixer les idées, considérant x comme une abscisse et y comme l'ordonnée correspondante, en sorte que l'équation proposée doive représenter la figure d'une courbe plane. Si l'on attribue arbitrairement à x et y, deux valeurs quelconques a et b, l'équation précédente donnera pour $\frac{dy}{dx}$ une valeur déterminée, au moyen de laquelle on pourrait connaître quelle serait la variation fort petite de y à partir de la valeur b, si x venait à augmenter ou à diminuer d'une quantité très-petite à partir de la valeur a. En effet, Δx représentant un très-petit accroissement de x, on a sensiblement $\Delta y=\frac{dy}{dx}\Delta x$. Attribuant ensuite à x et y dans l'équation précédente les valeurs $a+\Delta x$ et $b+\frac{dy}{dx}\Delta x$, cette équation donnera une nouvelle valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui pourra être

employée de la même manière. Il est évident qu'en opérant ainsi, on peut obtenir une courbe qui s'approchera indéfiniment de la courbe proposée à mesure que l'on attribuera des valeurs de plus en plus petites aux accroissements Δx. L'équation proposée doit donc être regardée comme déterminant la figure d'une certaine courbe dont on peut prendre arbitrairement un point quelconque.

Suivant la position arbitraire que l'on attribuera au premier point des courbes qui seraient construites par le moyen de l'équation précédente, non-seulement la position, mais en général la figure de ces courbes seront différentes. Néanmoins elles auront toutes un caractère commun, dont la nature est exprimée par l'équation différentielle proposée. Ainsi, à proprement parler, cette équation différentielle exprime une propriété commune à une infinité de courbes que l'on peut concevoir tracées sur un plan. Cette propriété détermine l'inclinaison de la tangente dans un point quelconque, en fonction des coordonnées de ce point : elle donne le moyen de construire la courbe entière, lorsqu'un point quelconque de cette courbe est déterminé.

On peut remarquer d'ailleurs, que le choix de l'une quelconque des courbes en nombre infini auxquelles appartient l'équation différentielle proposée dépend d'une seule quantité arbitraire. Il suffira de fixer, par exemple, la valeur de x correspondante à celle de $y=0$. En effet, l'on doit toujours retrouver la même courbe, quel que soit celui des points de cette courbe que l'on se soit donné.

377. Admettons en second lieu que l'équation

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y),$$

donne plusieurs valeurs différentes pour le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. On peut considérer chacune de ces valeurs à part, et lui appliquer ce qui a été dit dans le n° précédent. On verra dans ce cas que l'équation différentielle proposée appartient à plusieurs systèmes de courbes tracées sur un plan, qui se croisent en différents sens. Cette équation exprime des propriétés communes à toutes les courbes en nombre infini, qui appartiennent respectivement à chacun de ces systèmes, propriétés au moyen desquelles la tangente est déterminée dans un point quelconque des courbes en fonction des coordonnées de ce point ; en sorte que ces courbes pourraient être construites au moyen de l'équation proposée, si un de leurs points était donné.

378. Il est facile de concevoir d'après cela ce que doit être l'*équation primitive* ou l'*intégrale* de l'équation différentielle proposée. Cette équation primitive, si l'on veut qu'elle ait la même généralité que l'équation différentielle, doit convenir à l'une quelconque des courbes qui pourraient être construites au moyen de cette équation. Ainsi, 1° il faut qu'elle contienne une *constante arbitraire*, c'est-à-dire différente des constantes qui peuvent se trouver dans l'équation différentielle proposée, et qui entreraient dans l'expression analytique de la propriété représentée par cette équation. L'indétermination de la constante dont il s'agit donnera au ré-

sultat toute la généralité nécessaire pour qu'il représente le système entier des courbes auxquelles convient l'équation proposée. Il faut que cette équation primitive *satisfasse* à l'équation différentielle proposée, c'est-à-dire que les valeurs de y et $\frac{dy}{dx}$ qui seraient tirées de l'équation primitive et de sa différentielle étant substituées dans l'équation proposée, la rendent identique, ou du moins qu'en éliminant la constante arbitraire entre l'équation primitive et sa différentielle, on retrouve l'équation proposée.

379. Toute équation en termes finis qui satisfait à une équation différentielle proposée, et qui contient une constante arbitraire, est l'*intégrale générale* de cette équation différentielle. Cette intégrale générale donne les *intégrales particulières* quand on y attribue diverses valeurs à la constante arbitraire.

Il existe dans beaucoup de cas des équations primitives qui satisfont à une équation différentielle proposée, mais qui ne contiennent pas de constante arbitraire. Quelquefois ces équations sont des intégrales particulières dans lesquelles la constante arbitraire a disparu, à raison d'une certaine valeur que l'on aurait attribuée à cette constante, comme cela aurait lieu, par exemple, si on l'avait supposée égale à zéro ou infinie. D'autres fois les équations primitives dont il s'agit ont un caractère spécial, et doivent être considérées à part : elles constituent alors ce qu'on a nommé *solutions particulières*. Nous nous occupons seulement dans cet article de la recherche de l'intégrale générale.

380. Soit pour exemple l'équation différentielle

$$x\frac{dy}{dx}-y+b=0.$$

On en déduit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-b}{x},$$

et il est visible que cette équation appartient à une ligne droite quelconque passant par le point dont les coordonnées sont $x=0, y=b$. L'intégrale générale est

$$y-ax-b=0.$$

En effet, cette équation primitive satisfait à l'équation différentielle, parce que les valeurs $y=ax+b$, $\frac{dy}{dx}=a$, que l'on en déduit, rendent identique cette équation différentielle; de plus elle contient la constante arbitraire a qui n'entre pas dans l'équation proposée. En faisant varier cette constante, les intégrales particulières qu'on obtiendra représenteront toutes les lignes droites diversement inclinées qui se coupent sur l'axe des y, à une distance b de l'origine.

381. Soit encore l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}-a-2x=0, \quad \text{ou} \quad dy-(a+2x)dx=0.$$

dont l'équation primitive est

$$y-ax-x^2+b=0,$$

b étant la constante arbitraire. Cette équation primitive représente une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des y, et placé à une distance $-\frac{a}{2}$ de cet axe. La courbe

coupe l'axe des y à la distance $-b$ de l'origine. Pour avoir toutes les courbes auxquelles appartient l'équation différentielle proposée, il suffira donc de faire varier la constante b dans l'équation primitive, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; ou de transporter la parabole parallèlement aux y, sans changer la position de son axe.

L'équation différentielle $\frac{dy}{dx}-a-2x=0$ conduit à l'équation primitive $y-ax-x^2+b=0$, dans laquelle b est la constante arbitraire. On peut proposer une autre équation différentielle, qui conduirait à la même équation primitive dans laquelle a serait la constante arbitraire. Cette équation différentielle se trouvera immédiatement, en préparant l'équation primitive, de manière que la différenciation fasse disparaître la constante a, c'est-à-dire, en la résolvant par rapport à cette constante, ce qui donne

$$\frac{y-x^2+b}{x}-a=0.$$

Différenciant, et supprimant le facteur commun $\frac{1}{x^2}$, il vient

$$y-x\frac{dy}{dx}+x^2+b=0.$$

On peut aussi trouver la même équation différentielle sans résoudre l'équation primitive par rapport à a, en éliminant cette constante entre l'équation primitive et l'équation $\frac{dy}{dx}-a-2x=0$, qui s'en déduit par la différenciation. L'équation différentielle que nous venons d'obtenir en dernier lieu, et dans laquelle la constante a a

disparu, appartient, aussi bien que l'équation primitive dans laquelle a est regardée comme la constante arbitraire, à toutes les paraboles dont l'axe est parallèle à l'axe des y, et qui coupent cet axe à la distance $-b$ de l'origine des coordonnées.

Au reste si l'équation $y-x\frac{dy}{dx}+x^2+b=0$ était proposée, on ne pourrait pas en déduire immédiatement l'équation primitive dont elle dérive; car le premier membre n'est pas une différentielle exacte d'une fonction des variables x et y. Mais il le devient en restituant le facteur $\frac{1}{x^2}$.

382. Si l'équation différentielle proposée était

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-a^2=0,$$

on en déduirait

$$\frac{dy}{dx}=\pm a.$$

Par conséquent, cette équation appartient aux deux systèmes de lignes droites qui forment avec l'axe des x des angles dont les tangentes trigonométriques sont respectivement a et $-a$. Elle a pour intégrale générale

$$y^2-a^2x^2-2by+b^2=0,$$

résultat de la multiplication des deux équations $y+ax-b=0$, et $y-ax-b=0$, qui appartiennent respectivement, à cause de la constante arbitraire b, à l'une quelconque des lignes droites de l'un ou de l'autre système. En effet, en différenciant l'équation précédente, on a

$$y\frac{dy}{dx}-a^2x-b\frac{dy}{dx}=0\,;$$

et en éliminant b entre ces deux équations, on retrouvera l'équation proposée.

383. En général, étant donnée une équation primitive contenant les deux variables x,y et plusieurs constantes a,b,c, etc., que nous désignons par

$$F(x,y,a,b,c,\text{etc.})=0\,,$$

l'équation qui s'en déduit immédiatement par la différenciation,

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0\,,\quad \text{ou}\quad \frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy=0\,,$$

subsistera en même temps que cette équation primitive. On peut donc combiner d'une manière quelconque les deux équations dont il s'agit. Il est possible que la différenciation ait fait disparaître une des constantes a,b,c, etc.; et c'est ce qui aura lieu si cette constante se trouve seulement dans un terme qui ne contienne ni x, ni y. On peut éliminer une constante quelconque qui se trouverait à la fois dans les deux équations. On peut aussi éliminer une certaine fonction de x,y, qui se trouverait dans quelques termes. Il est possible enfin, que tous les termes de l'équation différentielle se trouvent multipliés par un facteur en x,y qui disparaîtra quand on égalera la somme de ces termes à zéro. On voit ainsi que d'une même équation primitive, on peut en général déduire par diverses opérations plusieurs équations différentielles différentes les unes des autres, et

l'on conçoit la difficulté du problème qui consiste à trouver l'intégrale d'une équation différentielle quelconque proposée.

Equations différentielles du premier ordre où le coefficient différentiel n'entre qu'à la première puissance.

384. Considérons une équation différentielle proposée du premier ordre dans laquelle le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ ne se trouve qu'au premier degré, et qui sera de la forme

$$P+Q\frac{dy}{dx}=0, \qquad \text{ou} \qquad Pdx+Qdy=0,$$

P et Q désignant des fonctions quelconques de x et y.

Il est visible en premier que, si la fonction $Pdx+Qdy$ était une différentielle exacte d'une certaine fonction de x, y, c'est-à-dire, si elle satisfaisait aux conditions d'intégrabilité indiquées n° 364, il suffirait de prendre l'intégrale de cette fonction, conformément aux règles données dans l'article précédent. Cette intégrale, complétée par une constante arbitraire, étant égalée à zéro, serait l'intégrale cherchée. Ce cas particulier ne peut avoir lieu, qu'autant que l'équation différentielle proposée est le résultat immédiat de la différenciation de l'équation primitive mise sous une forme telle, que la constante arbitraire se trouvant dans un terme où x et y n'entraient point, cette constante a pu disparaître par le seul fait de la différenciation.

385. L'équation proposée s'intègre toujours, ou du moins la recherche de l'intégrale est ramenée aux qua-

dratures, lorsque les variables sont *séparées*, c'est-à-dire, lorsque cette équation est mise sous la forme

$$Xdx+Ydy=0,$$

X désignant une fonction quelconque de x seule, et Y une fonction quelconque de y seule. L'intégrale générale est alors

$$\int dx.X+\int dy.Y+A=0,$$

A désignant la constante arbitraire.

Les variables sont évidemment séparées quand l'équation étant résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on trouve

$$\frac{dy}{dx}=X.Y;$$

et par conséquent cette séparation s'opère immédiatement dans toute équation qui n'est formée que de deux termes.

386. La séparation des variables s'opère quelquefois au moyen d'une transformation, ou d'un changement de variables. L'exemple le plus remarquable est celui de l'équation

$$\frac{dy}{dx}+Py+Q=0, \quad \text{ou} \quad dy+Pydx+Qdx=0,$$

dans laquelle P, Q désignent des fonctions de x seule, et que l'on appelle *équation linéaire du premier ordre*, ou *équation du premier degré et du premier ordre*, parce qu'elle ne contient que la première puissance de la fonction y et de son coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. Soit fait

$$y=Xt, \quad \text{d'où} \quad dy=tdX+Xdt,$$

en désignant par X une fonction de x et par t une nouvelle variable. Ces valeurs, substituées dans l'équation proposée, donnent

$$tdX+Xdt+PXtdx+Qdx=0.$$

Or la fonction X étant indéterminée, on peut la déterminer par la condition que l'équation soit partagée dans les deux suivantes :

$$tdX+Qdx=0, \quad \text{et} \quad dt+Ptdx=0.$$

Les variables sont séparées dans la seconde, qui donne,

$$\frac{dt}{t}=-Pdx, \quad lt=-\int Pdx, \quad t=e^{-\int Pdx};$$

et cette valeur de t étant substituée dans la première, il vient

$$dX=-dx.Qe^{\int Pdx}, \quad X=-\int dx.Qe^{\int Pdx}+A.$$

Mettant ces valeurs de X et t dans $y=Xt$, on trouve donc

$$y=e^{-\int Pdx}\left(-\int dx.Qe^{\int Pdx}+A\right),$$

pour l'intégrale générale de l'équation proposée, A étant la constante arbitraire.

387. On peut intégrer par la même méthode les équations de la forme

$$y^{m-1}.dy+Py^m.dx+Qdx=0,$$

P et Q désignant toujours des fonctions quelconques de x. En effet, cette dernière équation deviendra semblable à celle du n° précédent si l'on pose $y^m=z$.

388. Soit encore une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

Faisant $\frac{y}{x}=t$, d'où $y=xt$, $\frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}$, cette équation se change en

$$t+x\frac{dt}{dx}+f(t)=0, \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{t+f(t)}+\frac{dx}{x}=0,$$

dans lesquelles les variables sont séparées.

Du facteur propre à rendre l'équation intégrable.

389. Pour qu'une équation différentielle

$$Pdx+Qdy=0,$$

se présente sous la forme différentielle exacte d'une fonction des deux variables x, y, il est nécessaire en général que cette équation soit le résultat immédiat de la différenciation de l'équation primitive. Mais lors même que cette circonstance a lieu, l'équation différentielle ne se présente pas toujours sous la forme d'une différentielle exacte, parce que la différenciation introduit quelquefois des facteurs communs aux différents termes, qui disparaissent quand on égale la différentielle à zéro. Par exemple, l'équation primitive étant

$$\frac{y}{x}=a,$$

la différentielle du premier membre est $\frac{xdy-ydx}{x^2}$, et en égalant cette quantité à zéro, on aura simplement

$$xdy-ydx=0,$$

dont le premier membre n'est point une différentielle exacte.

390. Quelle que soit d'ailleurs l'origine d'une équation différentielle, on démontre qu'il existe toujours un facteur variable tel que si l'équation est multipliée par ce facteur, elle deviendra une différentielle exacte. En effet, supposons l'équation proposée mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx}+\mathrm{V}=0,$$

V désignant une fonction quelconque de x,y. L'intégrale générale de cette équation aura pour premier membre une certaine fonction de x,y et d'une certaine constante arbitraire a, qui ne se trouve pas dans l'équation différentielle. Admettons qu'ayant résolu cette intégrale générale par rapport à a, on l'ait mise sous la forme

$$\mathrm{U}=a,$$

U désignant une fonction de x,y. Si nous différencions alors cette équation, il viendra

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx}+\frac{d\mathrm{U}}{dy}\frac{dy}{dx}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}+\frac{\frac{d\mathrm{U}}{dx}}{\frac{d\mathrm{U}}{dy}}=0,$$

équation dans laquelle la constante a a disparu, et qui doit par conséquent être identique avec l'équation différentielle proposée. On doit donc avoir

$$\frac{dy}{dx}+\mathrm{V}=\frac{dy}{dx}+\frac{\frac{d\mathrm{U}}{dx}}{\frac{d\mathrm{U}}{dy}}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dy}{dx}+\mathrm{V}\right)\frac{d\mathrm{U}}{dy}=\frac{d\mathrm{U}}{dx}+\frac{d\mathrm{U}}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Or la quantité $\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}$ est la fonction dérivée complète de la fonction U. Donc il en sera de même de la quantité $\frac{dy}{dx}+V$, lorsqu'on l'aura multipliée par $\frac{dU}{dy}$.

On est assuré d'après ce qui précède de l'existence d'un facteur par lequel l'équation proposée étant multipliée, cette équation devient immédiatement intégrable. De plus on voit quel doit être ce facteur, et qu'il serait connu si l'équation primitive était connue.

391. Soit, par exemple, l'équation primitive

$$y^2-2a(x+y)=0.$$

En la différenciant on trouve

$$ydy-a(dx+dy)=0;$$

en en éliminant la constante a entre ces deux équations on obtiendra l'équation différentielle

$$(2x+y)dy-ydx=0.$$

Cette équation ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité. Mettant l'équation primitive sous la forme

$$\frac{y^2}{2(x+y)}=a,$$

on a pour la dérivée du premier membre prise par rapport à y, $\frac{y^2+2xy}{2(x+y)^2}$. Mettant également l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x+y}=0,$$

si on la multiplie, conformément à ce qu'on a vu dans le

n° précédent, par le facteur $\frac{(2x+y)y}{2(x+y)}$, on trouvera

$$\frac{y^2+2xy}{2(x+y)^2}\frac{dy}{dx}-\frac{y^2}{2(x+y)^2}=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{(y^2+2xy)dy-y^2dx}{2(x+y)^2}=0,$$

expression où l'on reconnaît la différentielle complète de la fonction $\frac{y^2}{2(x+y)}$, et dont par conséquent on déduit immédiatement l'équation primitive.

392. On conclut d'ailleurs de l'équation

$$\frac{dy}{dx}+V=\frac{\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}}{\frac{dU}{dy}},$$

du n° 390, qu'outre le facteur $\frac{dU}{dy}$, il en existe une infinité d'autres qui auront la propriété de rendre la fonction $\frac{dy}{dx}+V$ une différentielle exacte. En effet, on remarquera que la quantité

$$\varphi(U).\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}\right)$$

est la dérivée complète d'une certaine fonction de U que nous désignerons par $\Phi(U)$. Donc si on multipliait le premier membre de l'équation précédente par

$$\varphi(U).\frac{dU}{dy},$$

il deviendrait une dérivée exacte d'une certaine fonction de x, y. Cette fonction serait la fonction même qui a été désignée par $\Phi(U)$; en sorte que l'intégrale serait

$$\Phi(U)=const.,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$U=const.,$$

c'est-à-dire l'intégrale de l'équation proposée. Ainsi tous les multiplicateurs compris dans l'expression $\varphi(U)\frac{dU}{dy}$, où φ désigne une fonction entièrement arbitraire, ramèneront toujours à cette même intégrale.

393. Nous avons obtenu dans le n° 386, pour l'intégrale de l'équation

$$dy+Pydx+Qdx=0,$$

dans laquelle P et Q désignent des fonctions de x seule,

$$y=e^{-\int Pdx}\left(-\int dx.Qe^{\int Pdx}+A\right),$$

A étant la constante arbitraire. D'après ce qui précède on mettra donc cette intégrale sous la forme

$$A=\int dx.Qe^{\int Pdx}+y.e^{\int Pdx}=U,$$

et le facteur par lequel il faudra multiplier l'équation différentielle pour la rendre intégrable sera, conformément au n° 390, $\frac{dU}{dy}=e^{\int Pdx}$.

C'est ce qu'on peut vérifier directement; car soit μ le facteur cherché, que nous supposerons devoir être une fonction de x seule. Comme le terme μQdx est intégra-

ble, il s'agit seulement de déterminer μ par la condition de rendre une différentielle exacte la quantité

$$\mu dy+\mu Py dx;$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\frac{d\mu}{dx}=\mu P, \quad \text{ou} \quad \frac{d\mu}{\mu}=Pdx; \quad \text{d'où} \quad \mu=e^{\int Pdx}.$$

394. Soit en général l'équation

$$Pdx+Qdy=0,$$

P et Q désignant des fonctions quelconques de x et y. Si l'on représente par μ le facteur qui rendrait cette équation intégrable, la fonction μ devra évidemment satisfaire à la condition

$$\frac{d.\mu P}{dy}=\frac{d.\mu Q}{dx},$$

c'est-à-dire

$$P\frac{d\mu}{dy}-Q\frac{d\mu}{dx}+\mu\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=0.$$

Mais cette dernière équation est presque toujours plus difficile à traiter que l'équation proposée elle-même.

395. Nous remarquerons d'ailleurs, que toutes les fois qu'on parvient à séparer les variables dans l'équation

$$Pdx+Qdy=0,$$

au moyen d'une transformation quelconque, on connaît immédiatement le facteur par lequel il faudrait multiplier cette équation pour rendre $Pdx+Qdy$ une différentielle exacte.

En effet, supposons qu'ayant remplacé x et y par

d'autres variables s et t, l'équation proposée soit devenue

$$Mds+Ndt=0,$$

M et N étant des fonctions de s et t; et qu'en divisant les deux termes par la fonction V de s et t les variables se trouvent séparées, en sorte que $\frac{M}{V}$ soit une fonction de s seule, et que $\frac{N}{V}$ soit une fonction de t seule. La quantité $\frac{M}{V}\,ds+\frac{N}{V}\,dt$ sera donc devenue une différentielle exacte. Or, en remplaçant dans cette quantité s et t par leurs valeurs en x et y, elle ne différera point de la quantité $\frac{P}{V}\,dx+\frac{Q}{V}\,dy$ (en concevant toujours que l'on ait mis dans V à la place de s et t leurs valeurs en x et y). Donc $\frac{P}{V}\,dx+\frac{Q}{V}\,dy$ serait nécessairement aussi une différentielle exacte.

396. Nous avons donné dans le nº 388, pour exemple de la séparation des variables, l'équation

$$f\left(\frac{y}{x}\right).dx+dy=0,$$

qui, en faisant $y=xt$, d'où $dy=tdx+xdt$, devient

$$[f(t)+t]\,dx+xdt=0,$$

et dans laquelle les variables se séparent lorsqu'on divise les deux termes par $x[f(t)+t]$. D'après ce qui précède, l'équation dont il s'agit doit donc être rendue intégrable en la multipliant par le facteur $\frac{1}{x[f(t)+t]}$, où l'on

remplacera t par sa valeur en x et y ; c'est-à-dire par le facteur $\dfrac{1}{x\left(f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\right)}$. En effet, cette équation devient alors

$$\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)dx+dy}{x\left(f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\right)}=0,$$

qui se met facilement sous la forme

$$\frac{dx}{x}+\frac{\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}}{f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}}=0:$$

celle-ci est intégrable, puisque $\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}$ est la différentielle de $\frac{y}{x}$.

Théorème des fonctions homogènes. — Intégration des équations homogènes.

397. On désigne par le nom de *Théorème des fonctions homogènes*, certaines relations qui existent entre une fonction homogène, c'est-à-dire une fonction composée de termes dans lesquels la somme des exposants des variables est un nombre constant, soit U une fonction homogène de plusieurs variables x, y, etc. En mettant tx à la place de x, ty à la place de y, etc., cette fonction deviendra $t^n U$, n désignant la somme des exposants des variables dans chaque terme. On peut d'ailleurs faire $t=1+g$, ce qui revient à mettre $x+gx$ à la place de

$x, y+gy$ à la place de y, etc. On aura en appliquant le théorème de Taylor,

$$(1+g)^n U = U + g\left(\frac{dU}{dx}x + \frac{dU}{dy}y + \text{etc.}\right) + \frac{g^2}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2U}{dxdy}xy + \frac{d^2U}{dy^2}y^2 + \text{etc.}\right) + \text{etc.};$$

et en développant le premier membre et égalant les termes affectés des mêmes puissances de l'indéterminée g,

$$nU = \frac{dU}{dx}x + \frac{dU}{dy}y + \text{etc.}$$

$$n(n-1)U = \frac{d^2U}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2U}{dxdy}xy + \frac{d^2U}{dy^2}dy^2 + \text{etc.}$$

etc.

398. La considération de ces relations facilite quelquefois l'intégration des fonctions de plusieurs variables. Lorqu'une fonction est homogène, une différenciation effectuée sur cette fonction n'en altère pas l'homogénéité. Par conséquent si la fonction différentielle

$$Pdx + Qdy + \text{etc.},$$

était homogène, et satisfaisait aux conditions d'intégrabilité, on aurait immédiatement, en désignant par U son intégrale, et par n le degré de cette intégrale, qui surpasse toujours d'une unité le degré commun des fonctions P, Q, etc.,

$$nU = Px + Qy + \text{etc.} + const.$$

399. Lorsque dans l'équation différentielle

$$Pdx + Qdy = 0,$$

les fonctions P, Q des variables x, y, sont homogènes,

ces variables se séparent facilement, et par conséquent, l'équation devient immédiatement intégrable. En effet, faisant $y=xt$, les fonctions P,Q prennent alors la forme px^n, qx^n; p,q étant des fonctions de t seule, et n désignant la somme des exposants de x et y dans les termes de l'équation proposée. Cette équation devient donc

$$(p+qt)dx+qxdt=0, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x}+\frac{qdt}{p+qt}=0,$$

dont l'intégrale est

$$lx+\int dt.\frac{q}{p+qt}=const.$$

dans laquelle on devra, après avoir effectué l'intégration qui est indiquée, remplacer t par sa valeur $\frac{y}{x}$.

400. Soit pour exemple l'équation

$$(x-2y)dx+ydy=0.$$

Faisant $y=xt$, elle devient

$$\frac{dx}{x}+\frac{tdt}{1-2t+t^2}=0,$$

dont l'intégrale est

$$lx+l(1-t)+\frac{1}{1-t}=A,$$

A étant la constante arbitraire. En mettant pour t sa valeur $\frac{y}{x}$, on a

$$l(x-y)+\frac{x}{x-y}=A;$$

qui peut s'écrire

$$x-y=a.e^{-\frac{x}{x-y}},$$

a étant une autre constante.

401. Soit encore l'équation

$$(x^2+xy-2y^2)dx+(y^2-3x^2)dy=0.$$

Elle devient, en faisant $y=tx$,

$$\frac{dx}{x}+\frac{(t^2-3)dt}{t^3-2t^2-2t+1}=0.$$

Par les méthodes exposées dans l'article XXIV, on trouve,

$$\frac{t^2-3}{t^3-2t^2-2t+1}=-\frac{2}{5(t+1)}+\frac{7-\sqrt{5}}{5(2t-3-\sqrt{5})}+\frac{7+\sqrt{5}}{5(2t-3+\sqrt{5})};$$

ce qui change l'équation ci-dessus, en

$$\frac{dx}{x}-\frac{2}{5}\frac{dt}{t+1}+\frac{7-\sqrt{5}}{5}\frac{dt}{2t-3-\sqrt{5}}+\frac{7+\sqrt{5}}{5}\frac{dt}{2t-3+\sqrt{5}}=0,$$

dont l'intégrale est

$$lx-\frac{2}{5}l(t+1)+\frac{7}{10}l(t^2-3t+1)+\frac{1}{2\sqrt{5}}l\frac{2t-3+\sqrt{5}}{2t-3-\sqrt{5}}=lA.$$

Cette équation peut s'écrire,

$$\left(\frac{y+x}{x^2}\right)^{\frac{2}{5}}(y^2-3yx+x^2)^{\frac{7}{10}}\left(\frac{2y-3x+x\sqrt{5}}{2y-3x-x\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{5}}}=A.$$

402. Puisque, après avoir fait $y=xt$ dans l'équation

$$Pdx+Qdy=0,$$

supposée homogène, et n marquant le degré commun des fonctions P,Q, il vient

$$(px^n+qx^nt)\,dx+qx^{n+1}dt=0,$$

où les variables se séparent en divisant par $x(px^n+qx^nt)$;

il résulte de ce qui a été dit n° 395, que le facteur par lequel l'équation précédente doit être multipliée pour devenir intégrable est $\frac{1}{x(px^n+qx^n t)}$, en remplaçant t par sa valeur, c'est-à-dire $\frac{1}{Px+Qy}$. Ainsi la fonction $\frac{Pdx+Qdy}{Px+Qy}$ sera nécessairement une différentielle exacte.

C'est ce qu'on peut reconnaître directement : car soit μ un facteur par lequel il faudrait multiplier $Pdx+Qdy$ pour rendre cette quantité une différentielle exacte, facteur que nous supposerons une fonction homogène de x et y. On pourra donc écrire

$$\mu Pdx+\mu Qdy=dU,$$

U étant une fonction de x et y; et d'après le n° 398, il s'ensuivra

$$\mu Px+\mu Qy=kU,$$

k représentant le degré commun des fonctions μP et μQ augmenté d'une unité. Divisant ces deux équations l'une par l'autre, il viendra

$$\frac{Pdx+Qdy}{Px+Qy}=\frac{dU}{kU}.$$

Or $\frac{dU}{kU}$ est une différentielle exacte. Donc le premier membre en est également une.

403. Dans l'exemple du n° 400, l'équation proposée

$$(x-2y)dx+ydy=0$$

deviendra intégrable, d'après ce qui précède, en la multipliant par $\frac{1}{(x-2y)x+y^2}$, qui revient à $\frac{1}{(x-y)^2}$. En effet, l'équation

$$\frac{(x-2y)dx+ydy}{(x-y)^2}=0,$$

peut s'écrire

$$\frac{dx-dy}{x-y}+\frac{dx}{x-y}-\frac{x(dx-dy)}{(x-y)^2}=0,$$

(comme on peut le vérifier en réduisant tous les termes au même dénominateur), ou bien

$$d.l(x-y)+d\left(\frac{x}{x-y}\right)=0,$$

d'où l'on déduit immédiatement l'intégrale trouvée ci-dessus.

Équations du premier ordre dans lesquelles se trouvent la seconde puissance ou les puissances supérieures du coefficient différentiel.

404. Lorsque l'équation différentielle contient les puissances supérieures du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, on peut la concevoir résolue algébriquement par rapport à ce coefficient considéré comme l'inconnue. Si l'on égale ensuite à zéro les facteurs correspondants à chacune des racines, on aura autant d'équations différentielles dans lesquelles $\frac{dy}{dx}$ ne sera plus qu'au premier degré, et dont on pourra prendre les intégrales qui seront complétées chacune par une constante arbitraire. Le produit de ces diverses intégrales donnera l'intégrale générale de l'équation proposée. D'ailleurs, on ne diminue point la généralité de cette intégrale en admettant que ce soit la même constante arbitraire, qui entre-

dans tous ces facteurs. D'où l'on voit que toute équation différentielle du premier ordre, dans laquelle entre la puissance n du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, a pour intégrale une équation primitive, où la constante arbitraire est élevée à la puissance n.

On a donné, n° 382, un exemple d'une équation de cette espèce.

405. Souvent la résolution algébrique de l'équation proposée n'est pas possible, et par conséquent le procédé qui vient d'être indiqué, ne peut être appliqué. On parvient quelquefois à intégrer une équation du genre de celles dont il s'agit en la mettant d'abord sous la forme

$$y=L,$$

L désignant une fonction de x et de $\frac{dy}{dx}$, que nous désignerons pour abréger par y'. Si ensuite l'on différencie, il viendra

$$y'=\frac{dL}{dx}+\frac{dL}{dy'}\frac{dy'}{dx},$$

équation différentielle du premier ordre entre y' et x. Si elle peut être intégrée, on obtiendra une équation entre y' et x avec une constante arbitraire; et en éliminant ensuite y' entre cette équation et la proposée, on obtiendra l'intégrale cherchée.

406. La méthode dont il s'agit s'applique à l'équation

$$y=Mx+N,$$

M et N désignant des fonctions quelconques de $\frac{dy}{dx}$ ou y'. En effet, cette équation donne

$$dy=Mdx+x\frac{dM}{dy'}dy'+\frac{dN}{dy'}dy',$$

qui peut s'écrire (puisque $dy=y'dx$)

$$(M-y')dx+x\frac{dM}{dy'}dy'+\frac{dN}{dy'}dy'=0,$$

et rentre dans la forme de l'équation considérée n° 385 et 391. Le premier membre deviendra donc intégrable en multipliant par le facteur $e^{\int\frac{dM}{M-y'}}$, et son intégrale sera

$$x+e^{-\int\frac{dM}{M-y'}}.\left(\int\frac{dN}{M-y'}.e^{\int\frac{dM}{M-y'}}+A\right)=0,$$

A étant la constante arbitraire. Il restera à éliminer y entre cette équation et la proposée

407. Le cas où $M=y$, en sorte que l'équation proposée est

$$y=y'x+N,$$

a ét remarqué. On a alors en différenciant

$$\left(x+\frac{dN}{dy'}\right)dy'=0,$$

équation à laquelle on peut également satisfaire en posant

$$x+\frac{dN}{dy'}=0,\qquad \text{et}\qquad dy'=0.$$

L'équation $x+\frac{dN}{dy'}=o$ donnera une valeur de y' qui, étant substituée dans la proposée, conduira à une équation primitive : mais cette équation ne contenant pas de

constante arbitraire sera une solution particulière, conformément à ce qui a été dit n° 379. L'équation $dy'=0$ donne en l'intégrant

$$y'=A,$$

A étant la constante arbitraire : cette valeur mise dans la proposée à la place de y' donnera l'intégrale générale cherchée. Cette intégrale est l'équation d'une ligne droite dont la valeur attribuée à la constante A détermine l'inclinaison sur l'axe des x.

Solutions particulières des équations différentielles du premier ordre à deux variables.

408. On a remarqué n° 379, qu'il existait quelquefois des équations primitives qui satisfont à une équation différentielle, et qui néanmoins ne sont point comprises dans son *intégrale générale*. Les équations dont il s'agit, appelées *solutions particulières*, se distinguent principalement en ce qu'elles ne contiennent pas la constante arbitraire dont la présence est le caractère essentiel de l'intégrale générale.

Soit

$$F(x, y, a)=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (2)$$

Cette dernière équation sera le résultat de l'élimination de la constante a entre l'équation (1) et sa différentielle immédiate, qui est

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0\,;$$

et conformément à ce qui a été exposé dans les nos 376 et suivants, nous regardons les équations (1) et (2) comme appartenant au sytème d'une infinité de lignes courbes qui diffèrent seulement les unes des autres par les diverses valeurs que l'on peut attribuer à la constante a.

Cela posé, admettons que l'on ait donné dans l'équation (1) à la constante a une valeur déterminée, et considérons la courbe correspondante à cette valeur. Si, à partir de la valeur dont il s'agit, a augmente de la quantité infiniment petite da, l'équation (1) deviendra

$$F+\frac{dF}{da}\,da=0.$$

Cette dernière équation appartiendra à une seconde courbe infiniment voisine de la première; et les valeurs de x, y qui satisferont simultanément aux deux équations

$$F=0, \quad \text{et} \quad F+\frac{dF}{da}da=0,$$

ou si l'on veut aux deux équations

$$F=0, \quad \text{et} \quad \frac{dF}{da}=0,$$

appartiendront au point d'intersection de ces deux courbes.

409. Admettons maintenant que l'on élimine la constante a entre les deux équations

$$F=0, \quad \text{et} \quad \frac{dF}{da}=0.$$

Le résultat de cette élimination sera une équation pri-

mitive entre x et y appartenant à la ligne qui est le lieu des points d'intersection de toutes les courbes comprises dans l'intégrale générale, et qui correspondent aux diverses valeurs de la constante a. Cette ligne est évidemment touchée par toutes les courbes dont il s'agit, et elle en forme l'enveloppe. L'équation obtenue de cette manière, et qui ne contient pas de constante arbitraire, est la solution particulière de l'équation $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, à laquelle elle doit satisfaire, puisque la valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'un quelconque des points de l'enveloppe est commune à cette enveloppe et à la courbe comprise dans l'intégrale générale qui la touche en ce point.

Il faut remarquer d'ailleurs, que les courbes représentées par une équation différentielle et par son intégrale générale, c'est-à-dire les courbes correspondantes aux intégrales particulières, n'ont pas toujours une enveloppe ; ou qu'il n'arrive pas toujours que ces courbes sont tangentes à une certaine ligne d'une nature différente de la leur. Alors la solution particulière n'existe pas. On reconnaît qu'il n'existe pas de solution particulière lorsque l'équation $\frac{dF}{da} = 0$ ne peut donner pour la constante a une valeur exprimée en x, y ; ou plus exactement lorsqu'on ne peut déduire des équations $F = 0$ et $\frac{dF}{da} = 0$, par l'élimination de a, une équation entre x et y qui ne rentre pas dans l'intégrale générale et n'en soit pas un cas particulier.

410. Il est facile de reconnaître directement que la recherche de la solution particulière, c'est-à-dire d'une

équation qui, ne contenant pas la constante a, satisfait à l'équation différentielle (2), doit s'opérer par l'élimination de a entre l'équation (1) et l'équation $\frac{dF}{da}=0$. En effet, tout se réduit, pour trouver l'équation dont il s'agit, à mettre à la place de a, dans l'équation (1), une fonction de x,y convenablement déterminée. Or, supposons que cette substitution ait été faite, et regardons a comme une fonction de x,y. L'équation différentielle déduite immédiatement de l'équation (1) sera alors

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{da}\frac{da}{dx}=0.$$

Mais l'équation (2) résulte par l'hypothèse de l'élimination de a, supposée constante, entre l'équation (1) et son équation différentielle, qui est alors $\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0$. Donc il suffit, pour obtenir le même résultat, a étant supposée variable et fonction de x,y, de déterminer cette fonction a par la condition de faire disparaître le terme $\frac{dF}{da}\frac{da}{dx}$; car les deux équations entre lesquelles l'élimination s'opérera étant les mêmes dans les deux cas, l'équation (2) qui en résultera sera aussi la même. On peut faire disparaître ce terme en posant $\frac{da}{dx}=0$, ce qui donne a égale à une constante quelconque et répond au cas de l'intégrale générale ; ou en posant $\frac{dF}{da}=0$, ce qui donnera pour a une fonction de x,y, qui étant substituée dans l'équation (1) ou $F=0$, conduira à une équation primitive sans constante arbitraire, et satisfaisant à l'é-

quation différentielle, qui sera par conséquent la solution particulière demandée.

411. D'après ce qui précède, on peut obtenir la solution particulière quand on connaît l'intégrale générale. Cette solution particulière peut être aussi déduite de l'équation différentielle. Considérons l'une des courbes comprises dans l'intégrale générale et correspondante à une valeur a de la constante. Cette courbe sera à la fois coupée et touchée par la courbe contiguë correspondante à la valeur $a+da$, dans un des points de l'enveloppe dont la solution particulière est l'équation. Or, cette même courbe correspondante à la valeur a de la constante n'est plus touchée, mais est coupée par les autres courbes correspondantes aux valeurs de la constante qui diffèrent de a d'une quantité finie. Il suit de là que l'équation différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0,$$

étant résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, donnera généralement deux ou plusieurs valeurs différentes pour ce coefficient différentiel, si l'on attribue à x et y des valeurs quelconques. Mais si l'on attribue à x et y les valeurs qui appartiennent aux points de l'enveloppe, ou à la solution particulière qui représente cette enveloppe, il y aura au moins deux des valeurs de $\frac{dy}{dx}$ qui deviendront égales entre elles. Ainsi la solution particulière doit offrir ce double caractère ; 1° De satisfaire à l'équation différentielle proposée

$$f(x, y, y')=0,$$

(en écrivant pour abréger y' au lieu de $\frac{dy}{dx}$); 2° De rendre égales au moins deux des valeurs de y' qui satisfont à cette équation. Or, l'existence de deux ou plusieurs valeurs égales de y' données par l'équation précédente est exprimée par la condition

$$\frac{df}{dy'}=0:$$

d'où l'on conclut qu'en éliminant y' entre les deux équations

$$f(x,y,y')=0, \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy'}=0,$$

on obtiendra, si elles existent, les solutions particulières demandées.

412. On trouvera encore la solution particulière de la manière suivante. Supposons que l'équation différentielle proposée $f(x,y,y')=0$ ayant été résolue par rapport à y', on lui ait donné la forme suivante

$$y'+\mathrm{V}=0,$$

V étant une fonction de x,y. Puisque les courbes qui sont représentées par les intégrales particulières se coupent en général, et se touchent en même temps qu'elles se coupent seulement dans les points qui appartiennent à l'enveloppe, on voit que la fonction $-\mathrm{V}$ qui donne la valeur de y' doit représenter généralement au moins deux valeurs différentes pour cette quantité ; mais que si l'on attribue à x et y les valeurs qui appartiennent à l'enveloppe, les deux valeurs de cette même fonction $-\mathrm{V}$ deviendront égales entre elles. D'après cela nous pouvons nous représenter $-\mathrm{V}$ comme l'ordonnée verticale d'une surface dont les abscisses horizontales seraient x

et y; et cette surface doit avoir une figure telle que l'ordonnée verticale la coupant en général au moins dans deux points, elle la rencontre en un seul point, lorsque les abscisses x et y appartienent à la solution particulière. Il en résulte que la surface dont il s'agit doit être touchée par le cylindre vertical qui aurait pour base l'enveloppe, ou la courbe représentée par la solution particulière; et il est aisé d'en conclure que, pour les valeurs x et y qui appartiennent à cette solution, on doit avoir à la fois

$$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{0}, \qquad \frac{dV}{dy}=\frac{1}{0};$$

et par conséquent

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{0}, \qquad \frac{dy'}{dy}=\frac{1}{0}.$$

L'expression de ces conditions donnera donc la solution particulière s'il en existe une.

413. On peut remarquer d'ailleurs, qu'en différenciant l'équation proposée

$$f(x,y,y')=0,$$

on a

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dx}=0.$$

Mais le coefficient du dernier terme étant nul, d'après le n° précédent, pour les valeurs de x,y qui appartiennent à la solution particulière, ce terme disparaît, d'où il suit que la valeur du coefficient du second ordre $\frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$ demeure indéterminée; et il en sera de même des coefficients de tous les ordres supérieurs. Cette cir-

constance résulte de ce que chacun des points de l'enveloppe appartient à trois courbes différentes qui ont entre elles un contact du premier ordre, et pour lesquelles le coefficient du premier ordre $\frac{dy}{dx}$ a une valeur commune; savoir les deux courbes données par les intégrales particulières qui répondent aux valeurs $a+da$ de la constante arbitraire, et l'enveloppe elle-même qui est également comprise dans l'équation différentielle. Mais les valeurs des coefficients différentiels des ordres supérieurs sont généralement différentes pour ces diverses courbes; et comme les équations dont ces coefficients dépendent ne pourraient donner qu'une seule valeur, l'analyse résout cette difficulté en laissant cette valeur indéterminée. Ayant ainsi déduit de l'équation différentielle proposée l'expression de $\frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$, et égalant séparément à zéro le numérateur et le dénominateur de cette expression, on aura deux équations contenant y' qui doivent subsister en même temps que la proposée pour les valeurs de x, y' qui appartiennent à la solution particulière. Si l'on élimine y' entre chacune de ces équations et la proposée, et si les résultats de cette élimination ont un facteur commun, ce facteur sera la solution particulière cherchée. Si ces résultats ne peuvent subsister ensemble, on en conclura qu'il n'existe pas de solution particulière.

414. Si l'on applique ce qui précède à l'équation différentielle

$$x\frac{dy}{dx}-y+b=0,$$

considérée n° 380, et qui a pour intégrale générale

$$y-ax-b=0,$$

a étant la constante arbitraire, on trouvera pour la solution particulière le système des valeurs $x=0$, $y=b$ qui appartiennent au point d'intersection commun de toutes les droites représentées par l'intégrale générale.

415. Mais si l'on traite de la même manière l'équation

$$\frac{dy}{dx}-a-2x=0,$$

considérée n° 381, qui a pour intégrale générale

$$y-ax-x^2+b=0,$$

b étant la constante arbitraire, on ne trouvera aucun résultat. En effet il ne peut y avoir ici de solution particulière, puisque les courbes représentées par ces équations n'ont pas d'enveloppe. Il en est de même à l'égard de l'équation du n° 382.

416. Considérons l'équation

$$y=ax+b,$$

qui appartient à une ligne droite dont la position est déterminée par les valeurs des constantes a et b. La distance de cette ligne à l'origine des coordonnées a pour valeur $\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}$; par conséquent, si l'on élimine b entre l'équation précédente et l'équation

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}=r,$$

(dans laquelle r désigne une constante), l'équation résultante

$$y=ax+r\sqrt{a^2+1}\,,$$

appartiendra à toutes les lignes droites qui touchent le cercle dont le rayon est r, et dont le centre est à l'origine des coordonnées.

Si l'on différencie cette équation, et si l'on élimine la constante a au moyen de l'équation différentielle, il viendra en écrivant y' au lieu de $\frac{dy}{dx}$,

$$y=xy'+r\sqrt{y'^2+1}.$$

On conclura de tout ce qui a été exposé précédemment que cette équation différentielle a pour intégrale l'équation primitive

$$y=ax+r\sqrt{a^2+1}\,,$$

dans laquelle a est la constante arbitraire, et qui représente, aussi bien que l'équation différentielle, le système de toutes les lignes droites tracées à la distance r de l'origine des coordonnées, et de plus qu'elle a pour solution particulière l'équation

$$x^2+y^2=r^2,$$

qui appartient au cercle touché par toutes ces lignes droites, et qui est le lieu de leurs intersections.

En effet, si l'équation différentielle

$$y=xy'+r\sqrt{y'^2+1}$$

était proposée, on remarquerait en premier lieu qu'elle tombe dans le cas du n° 407. On trouve immédiatement, d'après ce qui a été dit dans ce numéro, $y=ax+r\sqrt{a^2+1}$ pour l'intégrale générale. De plus le facteur $x+\frac{dN}{dy'}$ de-

vient ici $x+\frac{ry'}{\sqrt{y'^2+1}}$. En l'égalant à zéro on en déduit la valeur $y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, et cette valeur étant substituée dans l'équation différentielle proposée, donne $y=\sqrt{r^2-x^2}$ qui est la solution particulière.

Si, conformément au n° 409, on veut déduire la solution particulière de l'intégrale générale

$$y=ax+r\sqrt{a^2+1},$$

il faudra éliminer a entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à a, qui est

$$0=x+\frac{ra}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Le résultat de cette élimination est évidemment le même qui vient d'être obtenu.

Si, d'après le n° 411, on veut déduire la solution particulière de l'équation différentielle, on devra éliminer y' entre les deux équations

$$y-xy'-r\sqrt{y'^2+1}=0 \quad \text{et} \quad x+\frac{ry'}{\sqrt{y'^2+1}}=0,$$

ce qui donne encore le même résultat.

D'après le principe énoncé n° 413, il faudrait différencier l'équation proposée

$$y-xy'-r\sqrt{y'^2+1}=0$$

pour en déduire la valeur de y'', ce qui donne

$$xy''+\frac{ry'y''}{\sqrt{y'^2+1}}=0.$$

Cette équation, dans le cas particulier que nous considérons, ne donne pas une expression générale de y'' en x, y et y', parce que la valeur de y'' est toujours nulle pour les intégrales particulières, qui représentent ici des lignes droites. Mais elle se décompose dans les deux facteurs

$$y''=0 \qquad \text{et} \qquad x+\frac{ry'}{\sqrt{y'^2+1}}=0,$$

dont l'un appartient à l'intégrale générale et l'autre à la solution particulière.

Enfin si, conformément au n° 412, on résout l'équation différentielle proposée par rapport à y' pour la mettre sous la forme $y'+\mathrm{V}=0$, on trouvera

$$y'+\frac{xy\pm r\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r^2-x^2}=0.$$

On voit que cette équation donne en général pour y' deux valeurs différentes, appartenant aux deux tangentes au cercle qui se croisent dans le point déterminé par les valeurs attribuées à x et y. Mais ces valeurs de y' deviendront égales si le radical de l'équation précédente est nul; c'est-à-dire si x et y satisfont à l'équation

$$x^2+y^2-r^2=0,$$

qui donne par conséquent la solution particulière. La condition qui rend égales les deux valeurs de y' est ici évidente : on peut vérifier que cette même condition résulterait également de la supposition de $\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{0}$ ou $\frac{dy'}{dy}=\frac{1}{0}$.

417. L'équation différentielle que l'on vient de considérer est un cas particulier de l'équation

$$y=xy'+N$$

du n° 407, dans laquelle N est une fonction quelconque de y'. Il est clair par ce qui précède que l'intégrale générale de cette équation appartient à un système de lignes droites dont les équations se déduisent de la proposée, en y remplaçant y' par une constante arbitraire. De plus toutes ces lignes droites touchent la courbe, dont on obtient l'équation en éliminant y' entre les deux équations suivantes

$$y=xy'+N, \qquad \text{et} \qquad x+\frac{dN}{dy'}=0.$$

418. Quant à l'équation générale

$$y=Mx+N,$$

considérée n° 406, dans laquelle M et N sont des fonctions de y' seule, l'intégrale générale a été donnée dans ce numéro. La solution particulière, c'est-à-dire l'équation de la courbe touchée par toutes les courbes correspondantes aux intégrales particulières, s'obtiendra en éliminant y' entre les équations

$$y=Mx+N \qquad \text{et} \qquad e^{-\int\frac{dM}{M-y'}}=0,$$

dont la dernière revient à $\int\frac{dM}{M-y'}=\frac{1}{0}$.

419. Il est quelquefois utile de savoir tracer un système de courbes d'une espèce donnée d'après la condition qu'elles soient toutes tangentes à une autre courbe

également donnée. Ce problème revient à déterminer une équation primitive, dont on donne la forme générale, de manière que son équation dérivée ait pour solution particulière une équation déterminée. Soit généralement

$$F(x, y, a, b, \text{etc.}) = 0,$$

une équation dans laquelle a, b, etc., sont des constantes. On demande que le système des courbes qui pourraient être données par cette équation en faisant varier les constantes, touche ou ait pour enveloppe la courbe représentée par l'équation

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Différentiant les deux équations proposées on trouve

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0;$$

et en éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre ces deux équations, l'équation résultante, qui est

$$\frac{dF}{dx}\frac{d\Phi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\Phi}{dx} = 0,$$

exprime la condition que les courbes représentées par les équations proposées aient un contact du premier ordre. Si l'on élimine donc x et y entre les trois équations

$$F(x, y, a, b, \text{etc.}) = 0, \quad \Phi(x, y) = 0, \quad \frac{dF}{dx}\frac{d\Phi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\Phi}{dx} = 0,$$

le résultat, qui sera une équation entre les constantes a, b, etc., exprimera la relation qui doit subsister entre a et les autres constantes pour que la condition dont il

s'agit soit satisfaite. Si l'on résout donc cette dernière équation par rapport à l'une des autres constantes, telle que b, et que l'on mette sa valeur dans l'équation proposée

$$F(x, y, a, b, \text{etc.}) = 0,$$

le résultat de cette élimination aura la propriété demandée.

420. Soit donnée, par exemple, l'équation

$$y^2 + ax + b = 0,$$

appartenant à une parabole dont le grand axe coïncide avec l'axe des x; et l'équation

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

appartenant à un cercle dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont r représente le rayon. On demande de déterminer les paraboles représentées par la première équation, de manière qu'elles soient toutes tangentes à ce cercle. Différentiant les équations précédentes, on a

$$2yy' + a = 0, \qquad \text{d'où} \qquad 2x - a = 0.$$
$$2x + 2yy' = 0,$$

Eliminant x et y entre les trois équations

$$y^2 + ax + b = 0, \qquad x^2 + y^2 - r^2 = 0, \qquad 2x - a = 0;$$

on trouve la relation

$$r^2 + \frac{a^2}{4} + b = 0, \qquad \text{d'où} \qquad b = -\frac{a^2}{4} - r^2.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation $y^2 + ax + b = 0$, la change en

$$y^2 + ax - \frac{a^2}{4} - r^2 = 0,$$

qui aura la propriété demandée.

En effet, si l'on applique à cette équation la règle du n° 404, pour obtenir la solution particulière de l'équation dérivée dont elle serait l'intégrale, on devra éliminer la constante arbitraire a entre les deux équations

$$y^2+ax-\frac{a^2}{4}-r^2=0, \qquad \text{et} \qquad 2x-a=0;$$

ce qui donnera pour cette solution particulière

$$y^2+x^2-r^2=0.$$

La dérivée de l'équation

$$y^2+ax-\frac{a^2}{4}-r^2=0,$$

se trouve d'ailleurs en différentiant par rapport à x, ce qui donne

$$2yy'+a=0;$$

puis en éliminant la constante a entre cette équation et la différentielle. On obtient ainsi l'équation dérivée

$$y^2-2xyy'-y^2y'^2-r^2=0,$$

à laquelle on peut appliquer les règles des nᵒˢ 411 et suivants. Si, par exemple, on la résout par rapport à y', il vient

$$y'=\frac{-x\pm\sqrt{y^2+x^2-r^2}}{y}.$$

L'équation qui exprimera l'égalité des deux valeurs de y, c'est-à-dire la solution particulière, est donc

$$y^2+x^2-r^2=0.$$

421. Considérons encore l'équation

$$z=x\,\text{tang}\,\theta-x^2\frac{g}{2V^2\cos^2\theta}.$$

qui appartient à la trajectoire d'un projectile lancé dans le vide. En faisant varier l'angle de projection θ, on obtient diverses courbes ayant une enveloppe dont l'équation se trouvera, conformément au n° 409, en différentiant par rapport à θ, ce qui donne

$$0=1-\frac{gx}{V^2}\,\text{tang.}\theta\,;$$

puis en éliminant θ entre cette dernière équation et la précédente. On trouvera ainsi pour l'équation cherchée

$$x^2=\frac{V^2}{g^2}(V^2-2gz).$$

La courbe tangente à toutes les trajectoires est donc une parabole dont l'axe est vertical, et dont le sommet est à la hauteur $\frac{V^2}{2g}$ au-dessus de l'origine.

XXXIII. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A DEUX VARIABLES DU SECOND ORDRE ET DES ORDRES SUPÉRIEURS.

422. Une équation différentielle du second ordre a généralement la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0:$$

x est la variable indépendante, y une autre variable dont la valeur dépend de celle de x au moyen de la relation établie par cette équation.

On peut faire sur l'équation dont il s'agit, des remarques analogues à celles qui ont été faites dans le n° 376. Considérons x comme l'abscisse et y comme l'ordonnée d'une courbe. Si l'on voulait construire la courbe à la-

quelle appartient l'équation précédente, on la supposerait résolue par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$, dont la valeur se trouvera donnée en fonction de x, y et $\frac{dy}{dx}$. On fixerait ensuite arbitrairement les valeurs de x et y, c'est-à-dire, un point quelconque par lequel on voudra faire passer la courbe. On fixerait de plus arbitrairement la valeur de $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire l'inclinaison que la courbe devra avoir en ce point. L'équation proposée donnera alors une valeur déterminée pour $\frac{d^2y}{dx^2}$, au moyen de laquelle le tracé de la courbe dont il s'agit pourra être effectué. En effet, faisant varier x d'une quantité très-petite Δx, on obtiendra approximativement les valeurs des coordonnées d'après le tableau suivant :

Abscisses.	Ordonnées correspondantes.
x	y
$x+\Delta x$	$y+\frac{dy}{dx}\Delta x$
$x+\Delta x+\Delta x$	$y+\frac{dy}{dx}\Delta x+\left(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x\right)\Delta x.$

On pourra donc construire la courbe avec une exactitude d'autant plus grande que les variations Δx seront prises plus petites. Ainsi, l'équation proposée exprime une propriété commune à une infinité de courbes que nous concevons tracées sur un plan. Elle détermine la figure de ces courbes lorsqu'on s'est donné un point par lequel elles doivent passer, et la direction de la tangente en ce point. Cette équation doit être regardée

comme ayant une signification plus étendue que l'équation du premier ordre, puisqu'il ne suffit plus ici pour déterminer la courbe de se donner un de ses points; il faut encore se donner la direction de la tangente en ce point.

On voit d'ailleurs, que le choix entre l'une quelconque des courbes qui peuvent être représentées par l'équation proposée dépend ici de deux quantités arbitraires dont l'une déterminerait y, et l'autre $\frac{dy}{dx}$, quand on se serait donné x.

423. L'intégrale générale de l'équation du second ordre proposée devant offrir la même généralité que cette équation, devra évidemment contenir deux constantes arbitraires. De plus cette intégrale devra satisfaire à l'équation différentielle proposée. Ces conditions suffisent pour que l'intégrale et sa différentielle représentent toutes deux le même système de courbes.

424. Considérons en général une équation primitive

$$F(x,y,a,b)=0$$

dans laquelle a et b sont constantes et où nous regardons y comme une fonction de x. On pourra parvenir à son équation dérivée du second ordre de plusieurs manières différentes : 1° en différentiant deux fois de suite par rapport à x, puis éliminant entre cette équation et ses deux différentielles les constantes a et b; 2° en différentiant une fois, puis éliminant successivement a et b entre l'équation primitive et son équation différentielle du premier ordre. On obtiendrait ainsi deux équations différentielles du premier ordre différentes

l'une de l'autre, dont chacune ne contiendrait qu'une constante arbitraire. Si l'on différentie ensuite chacune de ces équations, et si l'on élimine la constante qu'elle contient au moyen de la différentielle que l'on aura obtenue, elles conduiront toutes deux à la même équation du second ordre, qui ne différera point de celles que l'on aura trouvée par le premier procédé.

En effet, l'équation primitive $F(x, y, a, b,)=0$ doit être considérée comme représentant un double système de courbes ; savoir les courbes que l'on trouverait en faisant varier a, b demeurant constante, et les courbes que l'on trouverait en faisant varier b, a demeurant constante. Chacune des équations dérivées du premier ordre dans laquelle une des constantes a disparu, répond séparément à l'un de ces systèmes. Quant à l'équation unique du second ordre, où aucune des deux constantes ne se trouve, elle appartient également aux deux systèmes de courbes, et exprime une propriété qui leur est commune.

425. Soit par exemple l'équation primitive

$$y^2+ay+bx=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

qui appartient à une parabole ayant son axe parallèle à l'axe des x, et passant par l'origine des coordonnées. En faisant varier a, b demeurant constante, on changera à la fois la position du grand axe et le paramètre, et en faisant varier b, a demeurant la constante, on changera seulement le paramètre. L'équation différentielle du premier ordre est $\left(\text{en écrivant pour abréger } y'\right.$ et y'' au lieu de $\left.\frac{dy}{dx} \text{ et } \frac{d^2y}{dx^2}\right)$

$$2yy'+ay'+b=0; \qquad (2)$$

et en éliminant successivement a et b entre cette équation et l'équation primitive, on obtient les deux équations du premier ordre

$$y^2y'+b(y-xy')=0 \qquad (3)$$
$$y^2-2xyy'+a(y-xy')=0 \qquad (4)$$

qui appartiennent respectivement aux deux systèmes de paraboles dont on vient de parler.

En différentiant l'équation (3) on a

$$2yy'^2+y^2y''-bxy''=0;$$

et en éliminant b entre cette équation et l'équation (3), il vient pour l'équation du second ordre

$$y^2y''+2yy'^2-2xy'^3=0. \qquad (5)$$

En différentiant l'équation (4), on a

$$2y'^2+2yy''+ay''=0;$$

et en éliminant a entre cette équation et l'équation (4), on retrouve l'équation du second ordre (5).

L'équation primitive et ses deux différentielles sont

$$y^2+ay+bx=0,$$
$$2yy'+ay'+b=0,$$
$$2y'^2+2yy''+ay''=0.$$

Et en éliminant à la fois a et b entre ces trois équations, on retrouve également l'équation du second ordre (5). Cette équation, dans laquelle les deux constantes a et b ont disparu, exprime une relation qui subsiste pour l'une quelconque des courbes paraboliques que peut re-

présenter l'équation (1), quand on y donne à ces constantes toutes les valeurs possibles.

Les équations (3) et (4), contenant chacune une constante arbitraire, sont les deux intégrales du premier ordre, ou *intégrales premières* de l'équation (5). L'équation (1) contenant deux constantes arbitraires est *l'intégrale seconde* de cette même équation. Si l'on élimine y' entre les deux équations (3) et (4), on retrouve l'équation (1).

426. En général, si l'on obtient par un moyen quelconque, deux équations différentielles du premier ordre satisfaisant à une équation différentielle du second ordre proposée, et contenant chacune une constante qui n'entre pas dans cette dernière équation ; on obtiendra, par l'élimination de y' ou $\frac{dy}{dx}$ entre les deux équations dont il s'agit, une équation primitive contenant deux constantes arbitraires, qui satisfera nécessairement à l'équation proposée, et en sera l'intégrale générale.

427. Les notions qui viennent d'être exposées s'appliquent évidemment aux équations différentielles d'un ordre quelconque. Une équation différentielle de l'ordre n a toujours n intégrales de l'ordre immédiatement inférieur, qui contiennent chacune une constante arbitraire différente. Toutes ces constantes doivent se retrouver dans l'intégrale générale, si l'on veut que cette équation ait la même généralité que l'équation différentielle proposée. En effet, une équation primitive et ses différentielles successives jusqu'à l'ordre n donnent $n+1$, équations au moyen desquelles n constantes arbitraires peuvent êtres éliminées. Si l'on connaissait les n inté-

grales premières de l'équation proposée, on pourrait en déduire l'intégrale n^e, ou l'équation primitive, en éliminant entre ces n^e intégrales les $n-1$ coefficients différentiels, $y', y'', y''' \ldots\ldots y^{(n-1)}$.

Ces notions paraîtront encore plus évidentes en considérant la formule de Taylor,

$$y = y_0 + x\frac{dy_0}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2y_0}{dx^2} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y_0}{dx^3} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^4y_0}{dx^4} + \text{etc.},$$

qui donne le développement de la fonction y en série ordonnée suivant les puissances entières de la variable x, au moyen des valeurs de cette fonction et de ses coefficients différentiels qui correspondent à $x=0$. Soit une équation différentielle de l'ordre n,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

dont nous supposons ici que dépend la fonction y. On déduira de cette équation différentielle l'expression de $\frac{d^ny}{dx^n}$ en fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$; et par suite les expressions des coefficients différentiels des ordres plus élevés. Ainsi les valeurs de $\frac{d^ny_0}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y_0}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2}y_0}{dx^{n+2}}$, etc., seront connues en fonction des valeurs de $y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}, \frac{d^3y_0}{dx^3}, \ldots \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$. Si l'on substitue donc ces valeurs dans l'expression générale de y, on obtiendra une relation entre x et y qui sera le développement en série infinie de l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée; et dans laquelle ces dernières quantités, qui sont en nombre n, demeureront entièrement arbitraires.

428. Remarquons de plus que la formule de Taylor donne, en y faisant $h = -x$,

$$y_0 = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} - \text{etc.},$$

et que si on l'applique aux fonctions $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., on aura également

$$\frac{dy_0}{dx} = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^2}{2}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^5y}{dx^5} - \text{etc.},$$

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^2}{2}\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^5y}{dx^5} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^6y}{dx^6} - \text{etc.},$$

$$\frac{d^3y_0}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3} - x\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{x^2}{2}\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^6y}{dx^6} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^7y}{dx^7} - \text{etc.},$$

etc.

Or, l'équation différentielle proposée étant de l'ordre n, donnera $\frac{d^ny}{dx^n}$ et tous les coefficients différentiels des ordres plus élevés en fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. En substituant leurs valeurs dans les n premières de ces équations, on aura donc, conformément à ce qui a été dit ci-dessus, n équations différentielles de l'ordre $n-1$ contenant chacune une constante arbitraire différente $y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$.

Intégration des équations différentielles le plus simples du second ordre et des ordres supérieurs.

429. Cette intégration ne peut être effectuée que dans un petit nombre de cas particuliers. Soit en premier lieu l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{X},$$

X désignant une fonction de x seule. Multipliant les deux membres par le facteur constant dx, et intégrant, il viendra

$$d.\frac{dy}{dx}=\mathrm{X}dx, \qquad \frac{dy}{dx}=\mathrm{A}+\int \mathrm{X}dx.$$

Multipliant une seconde fois par dx, et intégrant de nouveau on aura

$$dy=\mathrm{A}dx+dx\int \mathrm{X}dx, \quad \text{et} \quad y=\mathrm{B}+\mathrm{A}x+\int dx\int \mathrm{X}dx,$$

pour l'intégrale demandée, dans laquelle A et B sont les deux constantes arbitraires.

En intégrant par partie $\int dx \int \mathrm{X}dx$, l'expression précédente de y pourra s'écrire

$$y=\mathrm{B}+\mathrm{A}x+x\int \mathrm{X}dx-\int \mathrm{X}xdx.$$

Si l'équation proposée était

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\mathrm{X},$$

on trouverait de la même manière

$$y=\mathrm{C}+\mathrm{B}x+\frac{\mathrm{A}x^2}{2}+\int dx\int dx\int \mathrm{X}dx,$$

ou, si l'on veut

$$y=\mathrm{C}+\mathrm{B}x+\frac{\mathrm{A}x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\int \mathrm{X}dx-x\int \mathrm{X}xdx+\frac{1}{2}\int \mathrm{X}x^2dx,$$

A,B,C étant les trois constantes arbitraires, et ainsi de suite. Il est facile de reconnaître la loi de ces expressions.

430. Soit maintenant l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{P},$$

dans laquelle P désigne une fonction du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ seulement, que nous désignerons pour abréger par y'. Cette équation peut s'écrire

$$\frac{dy'}{dx}=\mathrm{P};$$

et l'on en tire d'abord

$$dx=\frac{dy'}{\mathrm{P}}, \qquad \text{et} \qquad x=\mathrm{A}+\int\frac{dy'}{\mathrm{P}}.$$

On a de plus

$$dy=y'dx=\frac{y'dy'}{\mathrm{P}}, \qquad \text{et} \qquad y=\mathrm{B}+\int\frac{y'dy'}{\mathrm{P}}.$$

Eliminant y' entre ces deux équations, après avoir effectué les intégrations indiquées, on aura une équation entre x et y, qui sera l'intégrale cherchée, et dans laquelle A et B seront les deux constantes arbitraires.

On peut remarquer que si la fonction P de l'équation precédente contenait x avec y', la recherche se réduirait à intégrer l'équation $\mathrm{P}dx-dy'=0$ entre les deux variables x et y'; et que si la fonction P contenait y avec y', il s'agirait seulement d'intégrer l'équation $\mathrm{P}dy-y'dy'=0$ entre les deux variables y et y'.

431. Si l'on avait l'équation du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3}=Q,$$

Q désignant une fonction du coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou y'' seulement, on écrirait de même

$$\frac{dy''}{dx}=Q;$$

d'où

$$dx=\frac{dy''}{Q}, \quad \text{et} \quad x=A+\int\frac{dy''}{Q}.$$

On aurait ensuite

$$dy'=y''dx=\frac{y''dy''}{Q}, \quad \text{et} \quad y'=B+\int\frac{y''dy''}{Q};$$

puis

$$dy=y'dx=Bdx+\frac{dy''}{Q}\int\frac{y''dy''}{Q}, \text{ et } y=C+Bx+\int\frac{dy''}{Q}\int\frac{y''dy''}{Q}.$$

L'élimination de y'' entre cette équation et l'équation $x=A+\int\frac{dy''}{Q}$ donnera l'intégrale demandée, A,B,C étant les trois constantes arbitraires.

On continuerait de la même manière pour les équations analogues des ordres plus élevés.

432. Soit encore l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}=Y,$$

dans laquelle Y désigne une fonction de y seule. Multipliant par dy et intégrant, il viendra

$$\frac{dyd^2y}{dx^2}=Ydy, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=A+2\int Ydy;$$

d'où l'on tire

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{A+2\int Ydy}}, \quad \text{et} \quad x=B+\int\frac{dy}{\sqrt{A+2\int Ydy}},$$

pour l'intégrale demandée, dans laquelle A et B sont les deux constantes arbitraires.

433. Si l'équation proposée était

$$\frac{d^3y}{dx^3}=P,$$

P désignant une fonction de $\frac{dy}{dx}$ ou y' seulement, on remarquerait que cette équation peut s'écrire

$$\frac{d^2y'}{dx^2}=P,$$

et que l'on en tirera comme ci-dessus

$$dx=\frac{dy'}{\sqrt{A+2\int Pdy'}}, \quad \text{et} \quad x=B+\int\frac{dy'}{\sqrt{A+2\int Pdy'}}$$

Mais l'on a de plus

$$dy=y'dx=\frac{y'dy'}{\sqrt{A+2\int Pdy'}}, \text{ d'où } y=C+\int\frac{y'dy'}{\sqrt{A+2\int Pdy'}}.$$

En éliminant y' entre ces deux équations, on trouvera l'intégrale demandée, contenant les trois constantes arbitraires A, B, C.

434. Ce procédé s'étend facilement aux équations des ordres plus élevés, dans lesquelles le coefficient différentiel est donné en fonction seulement du coefficient différentiel de l'ordre inférieur de deux unités. Soit l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4}=Q,$$

Q étant fonction de $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou y'' seulement. Cette équation revient à

$$\frac{d^2y''}{dx^2}=Q,$$

d'où l'on tire comme ci-dessus

$$dx=\frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}}, \qquad x=B+\int\frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}}.$$

L'on a ensuite

$$dy'=y''dx=\frac{y''dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}}, \qquad y'=C+\int\frac{y''dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}}.$$

Puis

$$dy=y'dx=Cdx+\frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}}\int\frac{y''dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}},$$

$$y=D+Cx+\int\frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}}\int\frac{y''dy''}{\sqrt{A+2\int Qdy''}}.$$

L'élimination de y'' entre ces deux équations donnera l'intégrale cherchée. On remarquera que quand même cette élimination ne pourrait être effectuée, ces équations donneraient néanmoins deux valeurs correspondantes de x et y, en fixant arbitrairement une valeur de y''.

435. Soit par exemple l'équation très-simple

$$\frac{d^2y}{dx^2}=ky,$$

k désignant un nombre positif. L'intégrale sera, d'après le n° 432,

$$x=B+\int\frac{dy}{\sqrt{A+ky^2}}=B+\frac{1}{\sqrt{k}}.\,l\left(y\sqrt{k}+\sqrt{A+ky^2}\right),$$

d'où l'on déduit facilement (en changeant de constantes)

$$y = Ae^{-x\sqrt{k}} + Be^{x\sqrt{k}}.$$

Mais si l'on avait

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -ky,$$

il viendrait

$$x = B + \int \frac{dy}{\sqrt{A - ky^2}} = B + \frac{1}{\sqrt{k}} \text{arc sin.} y \sqrt{\frac{k}{A}};$$

d'où l'on tire

$$y = \sqrt{\frac{A}{k}} \sin. \sqrt{k}(x - B),$$

ou, ce qui revient au même (en changeant de constantes),

$$y = A \sin. x\sqrt{k} + B \cos. x\sqrt{k}.$$

Ces deux intégrales peuvent évidemment se déduire l'une de l'autre, en ayant égard aux relations des exponentielles imaginaires avec les fonctions trigonométriques.

Des facteurs propres à rendre intégrable une équation différentielle d'un ordre quelconque.

436. Lorsqu'une équation d'un ordre quelconque a été mise sous la forme

$$\frac{d^ny}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

(ce qui doit toujours être censé possible, puisque, quelle que soit l'équation de l'ordre $n-1$ dont celle-ci dérive, on peut, en mettant seule dans un membre la constante qu'il s'agit de faire disparaître, obtenir immédiatement par la différentiation une équation de l'ordre n dans laquelle le coefficient différentiel de l'ordre le plus

élevé n'entre qu'à la première puissance), il existe toujours une infinité de facteurs tels, que le premier membre de cette équation étant multiplié par l'un quelconque d'entre eux, deviendra nécessairement une différentielle exacte des quantités variables $x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$.

Soit, par exemple, l'équation du second ordre

$$y''+f(x,y,y')=0,$$

où nous écrivons pour abréger y' et y'' au lieu de $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$; et représentons par

$$\mathrm{F}(x,y,y',a)=0,$$

l'équation du premier ordre dont elle dérive, a étant la constante que l'on a fait disparaître. L'équation proposée sera donc le résultat de l'élimination de a entre l'équation $\mathrm{F}=0$ et celle qui en dérive immédiatement par la différentiation, qui est

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx}+\frac{d\mathrm{F}}{dy}y'+\frac{d\mathrm{F}}{dy'}y''=0.$$

Donc mettant celle-ci sous la forme

$$y''+\frac{\frac{d\mathrm{F}}{dx}+\frac{d\mathrm{F}}{dy}y'}{\frac{d\mathrm{F}}{dy'}}=0,$$

et admettant que a y soit remplacé par sa valeur en x,y,y', tirée de l'équation $\mathrm{F}=0$, elle sera identique avec l'équation proposée ; d'où l'on conclut que l'on a identiquement

$$[y''+f(x,y,y')]\frac{d\mathrm{F}}{dy'}=\frac{d\mathrm{F}}{dx}+\frac{d\mathrm{F}}{dy}y'+\frac{d\mathrm{F}}{dy'}y'':$$

et comme le second membre est une fonction dérivée complète, il en doit être de même du premier. Ainsi l'équation proposée devient immédiatement intégrable lorsqu'on la multiplie par $\frac{dF}{dy'}$, en remplaçant a dans ce facteur par sa valeur tirée de l'équation $F=0$.

Remarquons de plus qu'en regardant a comme variable dans l'équation $F=0$, elle donne par la différentiation

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dy'}y''+\frac{dF}{da}a'=0,\ \text{d'où}\ -a'=\frac{\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'+\frac{dF}{dy'}y''}{\frac{dF}{da}};$$

en écrivant a' au lieu de $\frac{da}{dx}$. On a donc par ce qui précède

$$[y''+f(x,y,y')]\frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}=-a';$$

ce qui montre qu'en multipliant l'équation proposée par le facteur $\frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}$, le premier membre devient une différentielle exacte dont l'intégrale est $-a$, la valeur de a étant donnée par l'équation $F=0$.

D'ailleurs l'équation proposée deviendra également une différentielle exacte si on la multiplie par $\frac{\varphi(a).\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}$, $\varphi(a)$ désignant une fonction quelconque de a; puisqu'elle sera alors identique avec la quantité

$-\varphi(a).a'$. Représentant par $\Phi(a)$ la fonction dont $-\varphi(a).a'$ est la fonction dérivée, l'intégrale de l'équation proposée sera donc $\Phi(a)=const.$, ce qui donne $a=const.$ Et comme on doit remplacer a par sa valeur tirée de l'équation $F=0$, on voit que l'équation $a=const.$, ne diffère point de l'équation $F=0$ dans laquelle a est regardée comme une constante arbitraire.

437. On a vu ci-dessus, qu'une équation du second ordre avait toujours deux équations primitives ou deux intégrales du premier ordre, contenant chacune une constante arbitraire différente. Il résulte de ce qui précède que chacune de ces équations donnerait des facteurs différents, également propres à rendre le premier membre de cette équation du second ordre une différentielle exacte. De plus, tous ces facteurs peuvent être compris comme il suit dans une formule générale. Soient

$$F(x,y,y',a)=0, \quad \text{et} \quad F_{1}(x,y,y',b)=0,$$

les deux équations primitives du premier ordre de l'équation proposée, a et b étant les deux constantes arbitraires. On aura donc, d'après ce qu'on a vu plus haut,

$$[y''+f(x,y,y')]\frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}=-a',$$

$$[y''+f(x,y,y')]\frac{\frac{dF_{1}}{dy'}}{\frac{dF_{1}}{db}}=-b'.$$

Soit maintenant $\Phi(a,b)$ une fonction quelconque de a,b.

Multipliant respectivement les deux équations précédentes par $\frac{d\Phi}{da}, \frac{d\Phi}{db}$, et ajoutant, il viendra

$$[y''+f(x,y,y')]\left(\frac{\frac{d\Phi}{da}\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}+\frac{\frac{d\Phi}{db}\frac{dF_{,}}{dy'}}{\frac{dF_{,}}{db}}\right)=-\left(\frac{d\Phi}{da}a'+\frac{d\Phi}{db}b'\right);$$

et comme le second membre est la fonction dérivée complète de $-\Phi(a,b)$, il s'ensuit que l'équation proposée étant multipliée par le facteur $\frac{\frac{d\Phi}{da}\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}+\frac{\frac{d\Phi}{db}\frac{dF_{,}}{dy'}}{\frac{dF_{,}}{db}}$, devient une fonction dérivée complète, dont la fonction primitive est $-\Phi(a,b)=const.$

Comme on peut prendre une autre fonction quelconque $\Psi(a,b)$, qui conduirait à l'intégrale $-\Psi(a,b) const.$, on en conclut $a=const.$ et $b=const.$ pour les deux intégrales de l'équation proposée, a et b étant déterminées respectivement, par les équations $F=0$ et $F_{,}=0$.

Les notions précédentes s'étendent facilement aux équations différentielles d'un ordre quelconque.

Intégration des équations linéaires à deux variables d'un ordre quelconque.

438. On nomme linéaires les équations dans lesquelles la fonction y et ses coefficients différentiels n'entrent qu'à la première puissance. Elles sont généralement de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots+Uy=V\,\ldots\ldots\ldots(1)$$

P,Q,.....U,V représentant des fonctions quelconques de la variable indépendante x.

Nous considérerons en premier lieu l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots\dots+Uy=0, \dots\dots \quad (2)$$

dans laquelle les coefficients P,Q,......U seraient des quantités constantes, c'est-à-dire indépendantes de x et y. Il s'agit d'intégrer cette équation, c'est-à-dire de trouver une expression de y en fonction de x qui y satisfasse, et qui contienne n constantes arbitraires de plus que n'en renferme l'équation différentielle proposée.

Si nous supposions $y=e^{px}$, nous aurions en général $\frac{d^n y}{dx^n}=p^n e^{px}$; et en substituant cette valeur dans l'équation proposée, il viendrait

$$p^n+Pp^{n-1}+Qp^{n-2}+\dots\dots+U=0 \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Par conséquent, si l'on prend pour p une des racines de l'équation (3), la valeur $y=e^{px}$ satisfera à l'équation (2); ce sera une valeur particulière de la fonction y. Et comme l'équation (3) aura en général n racines différentes, que nous désignerons par $p', p'', p''', \dots\dots p^{(n)}$, nous aurons de cette manière n valeurs particulières de la forme e^{px}, qui toutes satisferont à l'équation (2).

En multipliant chacune de ces valeurs par un coefficient constant, elles ne cesseront pas de satisfaire à l'équation (2). De plus cette équation sera également satisfaite par la somme de deux ou d'un plus grand nombre des valeurs dont il s'agit. Il résulte de là qu'au

moyen des n valeurs particulières correspondantes aux racines p', p'', p''',..... $p^{(n)}$, on peut former l'expression

$$y = A'e^{p'x} + A''e^{p''x} + A'''e^{p'''x} + \ldots\ldots + A^{(n)}e^{p^{(n)}x},$$

qui satisfait à l'équation différentielle proposée, et qui, contenant les n constantes arbitraires A', A'', A''',..... $A^{(n)}$, en est nécessairement l'intégrale générale.

439. Si l'équation (3) avait des racines imaginaires, la méthode précédente s'appliquerait également, les exponentielles imaginaires pouvant être remplacées par des sinus et cosinus d'arcs réels. Soit en effet $\alpha + 6\sqrt{-1}$ et $\alpha - 6\sqrt{-1}$ deux racines imaginaires de l'équation (3). Les valeurs particulières correspondantes seront

$$A'e^{x(\alpha + 6\sqrt{-1})} + A''e^{x(\alpha - 6\sqrt{-1})},$$

ou

$$e^{\alpha x}(A'e^{6x\sqrt{-1}} + A''e^{-6x\sqrt{-1}}),$$

ou

$$e^{\alpha x}(A'+A'')\cos.6x + (A'-A'')\sqrt{-1}.\sin.6x,$$

ou, en écrivant B' et B'' à la place de $A'+A''$ et $(A'-A'')\sqrt{-1}$,

$$e^{\alpha x}(B'\cos.6x + B''\sin.6x),$$

B' et B'' représentant de nouvelles constantes arbitraires.

440. Si l'équation (3) a deux ou plusieurs racines égales, la méthode dont il s'agit paraît en défaut. L'intégrale prend alors une forme particulière que l'on peut trouver de la manière suivante. Supposons d'abord que

les premières racines p' et p'' diffèrent très-peu l'une de l'autre, en sorte que l'on puisse écrire $p''=p'+\omega$, ω étant une quantité très-petite. La somme des deux valeurs particulières correspondantes sera donc

$$A'e^{p'x}+A''e^{(p'+\omega)x}=e^{p'x}(A'+A''e^{\omega x}),$$

ou en développant l'exponentielle $e^{\omega x}$,

$$e^{p'x}\left(A'+A''+A''\omega x+A''\frac{\omega^2x^2}{2}+\text{etc.}\right).$$

Si maintenant on suppose que ω devienne infiniment petite, rien n'empêche de prendre les valeurs de A' et A'' telles que $A''\omega$ conserve une valeur finie et arbitraire, ce qui suppose A'' infiniment grande, et que $A'+A''$ conserve également une valeur finie et arbitraire, ce qui suppose A' aussi infiniment grande, et de signe contraire à A''. Quant aux termes contenant les puissances supérieures de ω, ils devront être négligés. La somme des deux valeurs particulières dont il s'agit deviendra donc dans le cas de deux racines égales à p',

$$e^{p'x}(B'+B''x),$$

B' et B'' désignant deux constantes arbitraires.

Le même raisonnement s'appliquerait au cas où les trois racines p', p'', p''' seraient égales entre elles. Supposant $p'''=p'+\omega$, nous aurions donc pour la somme des trois valeurs particulières correspondantes

$$e^{p'x}(A'+A''x)+A'''e^{(p'+\omega)x},$$

c'est-à-dire

$$e^{p'x}\left(A'+A''x+A'''+A'''\omega x+A'''\frac{\omega^2x^2}{2}+A'''\frac{\omega^3x^3}{2.3}+\text{etc.}\right).$$

Admettons maintenant que ω devienne infiniment petite. Nous pourrons néanmoins prendre A′, A″, A‴ telles que les quantités $A'+A'''$, $A''+A'''\omega$, $\frac{A'''\omega^2}{2}$ conservent des valeurs finies et arbitraires. Supprimant d'ailleurs le terme contenant ω^3 et les termes suivants, il restera pour la somme des trois valeurs particulières dont il s'agit.

$$e^{p'x}(B'+B''x+B'''x^2).$$

On procéderait de la même manière dans le cas où il y aurait un plus grand nombre de racines égales ; et l'on voit qu'en général l'existence d'un nombre r de racines égales à p' dans l'équation (2) donne lieu à autant de valeurs particulières dont la somme est exprimée par

$$e^{p'x}(B'+B''x+B'''x^2+\ldots\ldots+B^{(r)}x^{r-1}).$$

441. Revenons maintenant à l'équation (1) dans laquelle les quantités P, Q,..... U, V sont en général des fonctions quelconques de x. On remarquera d'abord que si le terme V était nul, c'est-à-dire si l'on avait simplement

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots+Uy=0,\ldots\ldots \quad (4)$$

cette équation aurait, comme l'équation (2), la propriété d'être satisfaite par la somme de plusieurs valeurs particulières multipliées chacune par une constante, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître. Il suffirait donc alors de connaître un nombre n de valeurs particulières pour avoir immédiatement l'intégrale générale demandée.

442. Lorsque le dernier terme V subsiste dans l'é-

quation (1), elle ne présente plus la même propriété. Néanmoins l'intégrale générale peut être obtenue au moyen de la méthode suivante lorsqu'on connaît n valeurs particulières qui satisfont à l'équation (4).

Soient $Y', Y'', Y''', \ldots\ldots Y^{(n)}$ les n valeurs particulières dont il s'agit. Nous en formerons l'expression générale

$$y=A'Y'+A''Y''+A'''Y'''+\ldots\ldots\ldots+A^{(n)}Y^{(n)},$$

dans laquelle $A', A'', A''', \ldots\ldots A^{(n)}$ désignent maintenant des fonctions indéterminées de x. En prenant les différentielles successives de cette expression, on aura d'abord

$$\frac{dy}{dx}=A'\frac{dY'}{dx}+A''\frac{dY''}{dx}+A'''\frac{dY'''}{dx}+\ldots\ldots+A^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}$$
$$+\frac{dA'}{dx}Y'+\frac{dA''}{dx}Y''+\frac{dA'''}{dx}Y'''+\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}Y^{(n)},$$

et nous égalerons la seconde ligne à zéro, en regardant les fonctions $A', A'', A''', \ldots\ldots A^{(n)}$ comme assujetties à satisfaire à cette équation. Il viendra alors

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A'\frac{d^2Y'}{dx^2}+A''\frac{d^2Y''}{dx^2}+A'''\frac{d^2Y'''}{dx^2}+\ldots\ldots+A^{(n)}\frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2}$$
$$+\frac{dA'}{dx}\frac{dY'}{dx}+\frac{dA''}{dx}\frac{dY''}{dx}+\frac{dA'''}{dx}\frac{dY'''}{dx}+\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}.$$

Egalant de même la seconde ligne à zéro, il viendra

$$\frac{d^3y}{dx^3}=A'\frac{d^3Y'}{dx^3}+A''\frac{d^3Y''}{dx^3}+A'''\frac{d^3Y'''}{dx^3}+\ldots\ldots+A^{(n)}\frac{d^3Y^{(n)}}{dx^3}$$
$$+\frac{dA'}{dx}\frac{d^2Y'}{dx^2}+\frac{dA''}{dx}\frac{d^2Y''}{dx^2}+\frac{dA'''}{dx}\frac{d^2Y'''}{dx^2}+\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2},$$

où nous égalerons la seconde ligne à zéro ; et ainsi de suite. Nous parviendrons de cette manière à

$$\frac{d^ny}{dx^n}=A'\frac{d^nY'}{dx^n}+A''\frac{d^nY''}{dx^n}+A'''\frac{d^nY'''}{dx^n}+\ldots\ldots+A^{(n)}\frac{d^nY^{(n)}}{dx^n}$$
$$+\frac{dA'}{dx}\frac{d^{n-1}Y'}{dx^{n-1}}+\frac{dA''}{dx}\frac{d^{n-1}Y''}{dx^{n-1}}+\frac{dA'''}{dx}\frac{d^{n-1}Y'''}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^{n-1}Y^{(n)}}{dx^{n-1}},$$

et nous égalerons la seconde ligne à V.

Cela étant posé, il est visible que les valeurs $y=Y'$, $y=Y''$, $y=Y'''$,..... $y=Y^{(n)}$ satisfaisant séparément à l'équation (4), l'expression générale suivante $y=A'Y'+A''Y''+A'''Y'''+\ldots\ldots+A^{(n)}Y^{(n)}$ satisfera également à l'équation (1), pourvu que l'on regarde les fonctions $A',A'',A''',\ldots\ldots A^{(n)}$ comme assujetties à vérifier les n équations

$$\frac{dA'}{dx}Y'+\frac{dA''}{dx}Y''+\frac{dA'''}{dx}Y'''+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}Y^{(n)}=0,$$
$$\frac{dA'}{dx}\frac{dY'}{dx}+\frac{dA''}{dx}\frac{dY''}{dx}+\frac{dA'''}{dx}\frac{dY'''}{dx}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}=0,$$
$$\frac{dA'}{dx}\frac{d^2Y'}{dx^2}+\frac{dA''}{dx}\frac{d^2Y''}{dx^2}+\frac{dA'''}{dx}\frac{d^2Y'''}{dx^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2}=0,$$

. . . .

. . . .

$$\frac{dA'}{dx}\frac{d^{n-1}Y'}{dx^{n-1}}+\frac{dA''}{dx}\frac{d^{n-1}Y''}{dx^{n-1}}+\frac{dA'''}{dx}\frac{d^{n-1}Y'''}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+\frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^{n-1}Y^{(n)}}{dx^{n-1}}=V.$$

Or, ces équations étant linéaires donneront toujours pour les fonctions $\frac{dA'}{dx}, \frac{dA''}{dx}, \frac{dA'''}{dx},\ldots\ldots\frac{dA^{(n)}}{dx}$, des valeurs déterminées que nous représenterons par $\Phi',\Phi'',\Phi''',\ldots\Phi^{(n)}$. L'expression de l'intégrale générale cherchée sera donc

$$y=Y'(a'+\int dx.\Phi')+Y''(a''+\int dx.\Phi'')+\ldots+Y^{(n)}(a^{(n)}+\int dx.\Phi^{(n)}),$$

et contiendra les n constantes arbitraires $a', a'',\ldots. a^{(n)}$.

443. Si l'on ne connaissait qu'un nombre de valeurs particulières moindre que le nombre n qui exprime l'ordre de l'équation différentielle proposée, la méthode précédente ne pourrait pas être appliquée de la même manière. Les fonctions $\frac{dA'}{dx}$, $\frac{dA''}{dx}$, $\frac{dA'''}{dx}$, etc., n'étant plus en assez grand nombre pour que l'on pût poser toutes les équations nécessaires pour faire disparaître les secondes lignes des expressions des différentielles $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., on serait obligé de laisser subsister dans ces expressions les différentielles supérieures de quelques-unes des fonctions indéterminées A', A'', A''', etc. La recherche des valeurs de ces fonctions exigerait donc l'intégration d'une ou de plusieurs équations différentielles. Si le nombre des valeurs particulières connues est $n-1$, l'intégration générale peut toujours être obtenue, parce que la détermination des fonctions A', A'', A'''; etc., n'exige alors que l'intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, intégration qui peut toujours être effectuée conformément au n° 387.

444. Dans le cas particulier où les coefficients P, Q,... U de l'équation (1) sont des nombres constants, le dernier terme V seul étant une fonction de x, les valeurs particulières $Y', Y'', Y''', \ldots Y^{(n)}$ sont connues, conformément à ce qu'on a vu n° 438, puisqu'elles sont exprimées par $e^{p'x}, e^{p''x}, e^{p'''x}, \ldots e^{p^{(n)}x}$, en désignant par $p', p'', p''', \ldots p^{(n)}$ les racines de l'équation (3). La méthode précédente donne donc facilement l'expression de l'intégrale cherchée.

445. Soit, par exemple, l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\mathrm{P}\frac{dy}{dx}+\mathrm{Q}y=\mathrm{V}.$$

Désignant par p' et p'' les racines de l'équation

$$p^2+\mathrm{P}p+\mathrm{Q}=0\,;$$

l'expression générale de y sera

$$y=\mathrm{A}'e^{p'x}+\mathrm{A}''e^{p''x},$$

et les fonctions A' et A'' seront assujetties à satisfaire aux équations

$$\frac{d\mathrm{A}'}{dx}\,e^{p'x}+\frac{d\mathrm{A}''}{dx}\,e^{p''x}=0,$$

$$\frac{d\mathrm{A}'}{dx}\,p'e^{p'x}+\frac{d\mathrm{A}''}{dx}\,p''e^{p''x}=\mathrm{V}.$$

On en déduit par l'élimination

$$\frac{d\mathrm{A}'}{dx}=\frac{\mathrm{V}.e^{-p'x}}{p''-p'},\qquad \text{d'où}\quad \mathrm{A}'=\frac{a'+\int dx.\mathrm{V}e^{-p'x}}{p''-p'},$$

$$\frac{d\mathrm{A}''}{dx}=\frac{\mathrm{V}.e^{-p''x}}{p'-p'},\qquad \text{d'où}\quad \mathrm{A}''=\frac{a''+\int dx.\mathrm{V}e^{-p''x}}{p'-p''},$$

a' et a'' étant les deux constantes arbitraires. L'intégrale demandée est donc

$$y=\frac{(a'+\int dx.\mathrm{V}e^{-p'x})\,e^{p'x}-(a''+\int dx.\mathrm{V}e^{-p''x})\,e^{p''x}}{p'-p''}.$$

446. Si les racines de l'équation $p^2+\mathrm{P}p+\mathrm{Q}=0$ étaient imaginaires et désignées par $\alpha\pm6\sqrt{-1}$, on prendrait d'après le n° 439, pour l'expression générale de y,

$$y=\mathrm{A}'e^{\alpha x}\cos.6x+\mathrm{A}''e^{\alpha x}\sin.6x.$$

Les fonctions A′, A″ seraient assujetties à satisfaire aux équations

$$\frac{dA'}{dx}e^{\alpha x}\cos.6x+\frac{dA''}{dx}e^{\alpha x}\sin.6x=0,$$

$$\frac{dA'}{dx}(\alpha e^{\alpha x}\cos.6x-6e^{\alpha x}\sin.6x)+\frac{dA''}{dx}(\alpha e^{\alpha x}\sin.6x+6e^{\alpha x}\cos.6x)=V,$$

d'où l'on déduit par l'élimination

$$\frac{dA'}{dx}=-\frac{Ve^{-\alpha x}\sin.6x}{6},\quad \text{et}\quad A'=\frac{a'-\int dx.Ve^{-\alpha x}\sin.6x}{6},$$

$$\frac{dA''}{dx}=\frac{Ve^{-\alpha x}\cos.6x}{6},\quad \text{et}\quad A''=\frac{a''+\int dx.Ve^{-\alpha x}\cos.6x}{6}.$$

L'expression de l'intégrale générale est donc ici

$$y=e^{\alpha x}\frac{(a'-\int dx.Ve^{-\alpha x}\sin.6x)\cos.6x+(a''+\int dx.Ve^{-\alpha x}\cos.6x)\sin.6x}{6}.$$

447. Si les racines de l'équation $p^2+Pp+Q=0$ étaient égales entre elles, l'expression de y du n° 445, se réduirait à $\frac{0}{0}$. On en trouverait la véritable valeur en différentiant le numérateur et le dénominateur par rapport à p'', puis faisant $p''=p'$, ce qui donne

$$y=-(\int dx.xVe^{-p'x})e^{p'x}+(a''+\int dx.Ve^{-p'x})xe^{p'x}.$$

Comme les limites inférieures des intégrales demeurent arbitraires, on peut rétablir dans le premier terme la constante a', et écrire

$$y=(a'-\int dx.xVe^{-p'x})e^{p'x}+(a''+\int dx.Ve^{-p'x})xe^{p'x}.$$

Cette formule, dans le cas où $V=0$, se réduit à

$$y=(a'+a''x)e^{p'x},$$

comme cela doit être d'après le n° 424.

448. L'intégration des équations linéaires du second ordre, donne immédiatement la loi des températures permanentes d'une barre ou d'un anneau dont la section transversale est uniforme et fort petite.

Concevons une barre cylindrique ou prismatique d'une longueur infinie dont une extrémité placée dans un foyer de chaleur est maintenue constamment à la température U. Cette barre est placée dans l'air à la température 0. La chaleur communiquée par le foyer se propage dans la barre, l'échauffe progressivement, et se dissipe en partie dans le milieu environnant. Après un temps suffisant, il s'établira dans toute l'étendue du prisme des températures constantes dont il s'agit de connaître la loi, et qui sont évidemment déterminées par cette condition, que chaque partie reçoive du foyer par une de ses extrémités, une quantité de chaleur égale à celle qu'elle transmet aux parties suivantes et qu'elles perdent par leur surface extérieure.

Les dimensions transversales de la barre étant supposées très-petites, on peut regarder comme égales les températures de tous les points d'une même section. Nous désignerons par

Ω l'aire de la section transversale de la barre;

γ le périmètre de cette section;

x la distance au foyer d'une section quelconque de la barre;

v la température qui a lieu dans cette section;

K, h les conducibilités intérieure et extérieure de la substance de la barre.

Considérons l'élément de la longueur de la barre com-

pris entre les sections placées aux distances x et $x+dx$. La surface de cet élément étant γdx, la quantité de la chaleur perdue par sa surface extérieure dans l'unité de temps, est $h\gamma dxv$; et, par conséquent, la portion de chaleur perdue dans le même temps, par la partie de la barre qui est à la suite, est exprimée par l'intégrale $h\gamma \int_x^\infty dxv$. Mais d'une autre part, la température de tous les points d'une même section étant supposée la même, la chaleur traverse l'élément dont il s'agit, de la même manière que cela aurait lieu pour un solide infini compris entre deux plans parallèles. L'épaisseur du solide est ici dx, et les températures extrêmes sont v et $v+dv$. La quantité de chaleur qui le traverse dans l'unité de temps est donc $-K\Omega \frac{dv}{dx}$. Ainsi nous avons pour exprimer la condition énoncée, l'équation

$$-K\Omega \frac{dv}{dx} = h\gamma \int_x^\infty dx.v,$$

qui donne en différentiant

$$K\Omega \frac{d^2v}{d^2x} = h\gamma.v.$$

On parvient également à cette équation en remarquant que $-K\Omega \frac{dv}{dx}$ représentant la quantité de chaleur qui traverse dans l'unité de temps la section de la barre placée à la distance x du foyer, on aura $-K\Omega \left(\frac{dv}{dx} + d.\frac{dv}{dx}\right)$ pour représenter la quantité de chaleur qui traverse dans le même temps la section placée

à la distance $x+dx$. Or, la différence de ces deux quantités, qui est $K\Omega\frac{d^2v}{dx^2}dx$, doit nécessairement être égale à la quantité de chaleur $h\gamma dx.v$ qui se dissipe par la partie de la surface correspondante à l'intervalle dx. On a donc comme ci-dessus

$$K\Omega\frac{d^2v}{dx^2}dx = h\gamma dx.v, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{h\gamma}{K\Omega}v.$$

449. L'intégrale complète de cette équation différentielle est, conformément au nº 445,

$$v = A.e^{-x\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}}} + B.e^{x\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}}},$$

e représentant la base des logarithmes hyperboliques, A et B les deux constantes arbitraires. Mais il est visible qu'ici la constante B doit être nulle, car la valeur de v ne peut croître indéfiniment avec x. De plus comme on doit avoir $v=U$ quand $x=0$, la constante A doit être égale à U. L'expression demandée des températures permanentes est donc

$$v = U.e^{-x\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}}}.$$

Ainsi, les températures des divers points du prisme étant représentées par des nombres, les distances de ces points au foyer sont représentés par les logarithmes correspondants. Dans deux barres de même substance, les distances du foyer où l'on observe la même température sont proportionnelles à la quantité $\sqrt{\frac{\Omega}{\gamma}}$, ou à la racine quarrée des dimensions homologues si les sections

sont semblables, Dans deux barres de substances différentes, ces mêmes distances sont proportionnelles au rapport $\sqrt{\frac{K\Omega}{h\gamma}}$. Les observations de ce genre peuvent faire connaître pour divers corps la valeur du rapport $\frac{K}{h}$ des deux conducibilités. On a même cherché à faire servir les observations dont il s'agit, à déterminer les valeurs relatives de la conducibilité intérieure K, en recouvrant chaque prisme d'une couche de vernis, dans la vue de leur donner la même conducibilité extérieure, procédé qui ne présente peut-être pas toute l'exactitude nécessaire.

450. On déduit d'ailleurs facilement de l'équation précédente toutes les circonstances du mouvement de la chaleur dans les différentes parties du prisme. La quantité de chaleur qui traverse dans l'unité de temps la section placée à la distance x du foyer, est

$$K\Omega.\frac{dv}{dx} = U.\sqrt{hK.\gamma\Omega}.e^{-x\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}}},$$

et par conséquent, la quantité de chaleur qui sort du foyer, et qui se dissipe dans l'air par la surface entière de la barre, est dans le même temps

$$U.\sqrt{hK.\gamma\Omega}.$$

Cette quantité est donc proportionnelle à la puissance $\frac{3}{2}$ des dimensions homologues pour des barres de même substance et de figures semblables.

451. Admettons maintenant qu'il s'agisse d'une barre prismatique d'une longueur déterminée représentée par a, et dont les deux extrémités soient maintenues respectivement aux températures constantes U et V. La loi des températures permanentes sera toujours donnée par l'équation différentielle du n° 448 ; mais dans l'intégrale générale du n° 449, que nous pouvons écrire

$$v = \mathrm{A}.e^{-\lambda x} + \mathrm{B}.e^{\lambda x},$$

en posant pour abréger $\sqrt{\frac{h\gamma}{\mathrm{K}\Omega}} = \lambda$, on devra déterminer les constantes arbitraires A et B de manière que $v = \mathrm{U}$ lorsque $x = 0$, et $v = \mathrm{V}$ lorsque $x = a$. Cette intégrale deviendra alors

$$v = \frac{\mathrm{U}\left(e^{-\lambda(a-x)} - e^{\lambda(a-x)}\right) + \mathrm{V}\left(e^{-\lambda x} - e^{\lambda x}\right)}{\left(e^{-\lambda a} - e^{\lambda a}\right)},$$

expression qui donnera les températures d'un point quelconque de la barre compris entre ses deux extrémités.

452. Les résultats précédents ne supposent pas nécessairement que l'axe de la barre soit rectiligne. Les dimensions de la section transversale étant supposées très-petites, on peut attribuer à cette barre une figure quelconque, et même supposer que ses deux extrémités sont réunies, de manière à former un anneau. La formule du numéro précédent exprimera toujours les températures permanentes d'une portion de la barre comprise entre deux foyers, dont l'intervalle est a, et qui sont maintenus respectivement aux températures U et V.

Si la barre forme un anneau, et s'il n'y a qu'un seul foyer maintenu à la température U, on aura évidemment dans toute l'étendue de l'anneau

$$v=\mathrm{U}\,\frac{e^{-\lambda(a-x)}-e^{\lambda(a-x)}+e^{-\lambda x}-e^{\lambda x}}{e^{-\lambda a}-e^{\lambda a}},$$

ou

$$v=\mathrm{U}\,\frac{e^{\lambda(a-x)}+e^{\lambda a}}{e^{\lambda a}+1},$$

a désignant la longueur de son périmètre. Si l'on veut compter les x du point de l'anneau opposé au foyer, et qui partage le périmètre en deux parties égales, on aura

$$v=\mathrm{U}\,\frac{e^{-\lambda x}+e^{\lambda x}}{e^{-\frac{1}{2}\lambda a}+e^{\frac{1}{2}\lambda a}}.$$

On ne donnera à x dans la première de ces formules que des valeurs comprises entre 0 et a, et dans la seconde que des valeurs comprises entre $-\frac{a}{2}$ et $+\frac{a}{2}$.

453. Considérons trois points de l'intervalle compris entre deux foyers situés aux distances $x, x+\alpha$ et $x+2\alpha$ de l'origine des x. En désignant respectivement par v_0, v_1, v_2 leurs températures, on aura, d'après l'équation générale du n° 451

$$v_0=\mathrm{A}.e^{-\lambda x}+\mathrm{B}.e^{\lambda x},$$
$$v_1=\mathrm{A}.e^{-\lambda(x+\alpha)}+\mathrm{B}.e^{\lambda(x+\alpha)},$$
$$v_2=\mathrm{A}.e^{-\lambda(x+2\alpha)}+\mathrm{B}.e^{\lambda(x+2\alpha)}.$$

Donc

$$\frac{v_0+v_2}{v_1}=\frac{\mathrm{A}e^{-\lambda x}(1+e^{-2\lambda\alpha})+\mathrm{B}e^{\lambda x}(1+e^{2\lambda\alpha})}{\mathrm{A}e^{-\lambda(x+\alpha)}+\mathrm{B}e^{\lambda(x+\alpha)}},$$

ou bien

$$\frac{v_0+v_2}{v_1}=e^{-\lambda\alpha}+e^{\lambda\alpha}.$$

On voit donc que l'état permanent des températures d'une barre ou d'un anneau est toujours tel, que prenant entre deux foyers plusieurs points également espacés, et considérant trois de ces points placés les uns à la suite des autres, la somme des températures des points extrêmes, divisée par la température du point intermédiaire, présentera toujours une même valeur qui dépend uniquement de la distance α des points dont il s'agit. Ce résultat remarquable a été vérifié par l'expérience.

XXXIV. Elimination des variables entre les équations différentielles simultanées. — Intégration des équations linéaires simultanées.

454. Considérons plusieurs variables x, y, z, etc., regardées comme des fonctions d'une autre variable indépendante v, et admettons que l'on ait plusieurs équations entre les variables x, y, z, etc., et leurs coefficients différentiels

$$\frac{dx}{dv},\ \frac{d^2x}{dv^2},\ \text{etc...};\quad \frac{dy}{dv},\ \frac{d^2y}{dv^2},\ \text{etc...};\quad \frac{dz}{dv},\ \frac{d^2z}{dv^2},\ \text{etc....}$$

Si les équations dont il s'agit, sont en même nombre que les variables x, y, z, etc., on pourra toujours déduire du système de ces équations, des équations différentielles séparées contenant une seule de ces variables avec la variable indépendante v. L'intégration des équations proposées, c'est-à-dire la recherche des expres-

sions générales de x, y, z, etc., en fonction de la variable indépendante, serait ainsi ramenée au cas d'une seule équation différentielle entre deux variables.

En effet, supposons que l'ou n'ait que deux équations entre les deux variables x et y, et leurs coefficients différentiels pris par rapport à v. Soit m l'ordre de la première équation par rapport à y, et n l'ordre de la seconde équation, par rapport à la même variable. On différentiera n fois la première équation, et m fois la seconde, ce qui donnera, en comprenant les équations proposées, $m+n+2$ équations, au moyen desquelles on peut éliminer la variable y et ses coefficients différentiels $\frac{dy}{dv}, \frac{d^2y}{dv^2}, \frac{d^3y}{dv^3}$, etc., jusqu'à l'ordre $m+n$. Il restera une équation qui ne contiendra que la variable x seule et ses coefficients différentiels. On obtiendra de la même manière une équation en y. La même remarque s'applique au cas où le nombre des variables et des équations proposées est plus considérable. On voit de plus que, si les équations différentielles proposées sont linéaires, l'élimination dont il s'agit, conduira à une équation finale également linéaire.

455. On peut, dans quelques cas, et particulièrement lorsque les équations différentielles simultanées sont linéaires et à coefficients constants, obtenir directement des équations primitives dont on déduirait les valeurs générales des variables. Considérons d'abord deux équations du premier ordre, qui seront généralement de la forme

$$P\frac{dx}{dv}+Q\frac{dy}{dv}+Sx+Ty=U,$$
$$P'\frac{dx}{dv}+Q'\frac{dy}{dv}+S'x+T'y=U'.$$

Par une élimination facile, on peut les ramener à la forme plus simple

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dv}+Sx+Ty&=U\\ \frac{dy}{dv}+S'x+T'y&=U'\end{aligned}\right\}\text{..................} \quad (1).$$

Nous regarderons en général S,T,U,S',T',U' comme représentant des fonctions quelconques de v. La difficulté consiste ici en ce que les deux variables x,y, se trouvent à la fois dans les deux équations proposées, et il s'agit de remplacer ces deux équations par deux autres qui ne contiendraient chacune qu'une seule variable avec la variable indépendante v. Pour y parvenir, on multipliera la seconde équation par un facteur Φ qui sera une fonction indéterminée de v, et on l'ajoutera à la première, ce qui donnera

$$\frac{dx}{dv}+\Phi\frac{dy}{dv}+(S+S'\Phi)\,x+(T+T'\Phi)\,y=U+U'\Phi.$$

De plus on posera $x+\Phi y=u$, d'où

$$x=u-\Phi y,$$
$$\frac{dx}{dv}+\Phi\frac{dy}{dv}=\frac{du}{dv}-\frac{d\Phi}{dv}y,$$

u étant une nouvelle variable. Ces valeurs étant substituées dans l'équation précédente la changeront en

$$\frac{du}{dv}+(S+S'\Phi)u-y\left\{\left[\frac{d\Phi}{dv}+(S+S'\Phi)\Phi\right]-(T+T'\Phi)\right\}=U+U'\Phi;$$

et en déterminant la fonction Φ de manière à satisfaire à l'équation

$$\frac{d\Phi}{dv}+(S+S'\Phi)\Phi-(T+T'\Phi)=0\,;\;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

il restera à intégrer l'équation

$$\frac{du}{d\nu}(\mathrm{S}+\mathrm{S}'\Phi)\,u=\mathrm{U}+\mathrm{U}'\Phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

L'équation (2) ne contient que les variables Φ et ν. Si l'on peut trouver une valeur pour Φ qui satisfasse à cette équation, on la substituera dans l'équation (3), qui ne contiendra plus que les variables u et ν, et qui rentrera dans les cas traités n° 438 et suivants.

456. Si les coefficients S,T, S',T' des équations (1), sont constants, on pourra satisfaire à l'équation (2), en prenant pour Φ un nombre constant, ce qui donne $\frac{d\Phi}{d\nu}=0$, la valeur de ce nombre étant déterminée par l'équation du second degré.

$$(\mathrm{S}+\mathrm{S}'\Phi)\,\Phi-(\mathrm{T}+\mathrm{T}'\Phi)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

En appliquant d'ailleurs à l'équation (3), la méthode du numéro 386, on trouvera pour l'intégrale de cette équation

$$u=e^{-(\mathrm{S}+\mathrm{S}'\Phi)\nu}\left[a+\int d\nu(\mathrm{U}+\mathrm{U}'\Phi).e^{(\mathrm{S}+\mathrm{S}'\Phi)\nu}\right] \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

a étant la constante arbitraire. On doit mettre dans cette expression à la place de Φ, les deux valeurs qui satisfont à l'équation (4); en les désignant par Φ_1 et Φ_2, et remplaçant u par son expression en x et y, on aura les deux équations primitives

$$x+\Phi_1 y=e^{-(\mathrm{S}+\mathrm{S}'\Phi_1)\nu}\left[a_1+\int d\nu(\mathrm{U}+\mathrm{U}'\Phi_1).e^{(\mathrm{S}+\mathrm{S}'\Phi_1)\nu}\right],$$
$$x+\Phi_2 y=e^{-(\mathrm{S}+\mathrm{S}'\Phi_2)\nu}\left[a_2+\int d\nu(\mathrm{U}+\mathrm{U}'\Phi_2).e^{(\mathrm{S}+\mathrm{S}'\Phi_2)\nu}\right],$$

au moyen desquelles on pourra déterminer les expressions de chacune des variables x et y en fonction de ν.

457. Si les racines de l'équation (4) étaient imaginaires, et désignées par $\alpha \pm 6\sqrt{-1}$, l'équation (2), à laquelle la quantité Φ doit satisfaire, pourrait alors se mettre sous la forme

$$\frac{d\Phi}{d\nu}+S'[(\Phi-\alpha)^2+6^2]=0,$$

ou bien

$$\frac{d\Phi}{(\Phi-\alpha)^2+6^2}+S'd\nu=0;$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{6}\text{ arc tang. }\frac{\Phi-\alpha}{6}=C-S'\nu,$$

c désignant une constante arbitraire, et donne

$$\Phi=\alpha+6.\text{tang. }6(C-S'\nu).$$

En donnant à la constante *c* deux valeurs particulières quelconques; en supposant par exemple $6C=0$ et $6C=\frac{\pi}{2}$, on aura les deux valeurs

$$\Phi=\alpha-6.\text{tang. }6S'\nu \quad \text{et} \quad \Phi=\alpha+6.\text{cot. }6S'\nu,$$

qui étant substituées successivement dans l'équation (5), donneront les deux équations nécessaires pour déterminer x et y en fonction de ν.

Si les deux racines de l'équation (4) étaient égales entre elles, et représentées par ρ, l'équation (2) se mettrait sous la forme

$$\frac{d\Phi}{d\nu}+S'(\Phi-\rho)^2=0,$$

ou

$$\frac{d\Phi}{(\Phi-\rho)^2}+S'd\nu=0;$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{\Phi - \rho} = C + S'\nu,$$

c désignant toujours une constante arbitraire ; d'où l'on tire

$$\Phi = \rho + \frac{1}{C + S'\nu}.$$

En donnant à c deux valeurs particulières quelconques, supposant par exemple $c = \infty$ et $c = 0$, on aura

$$\Phi = \rho \quad \text{et} \quad \Phi = \rho + \frac{1}{S'\nu},$$

valeurs qui devront être substituées comme ci-dessus dans l'équation (5).

458. Supposons maintenant que l'on ait trois équations du premier ordre entre les variables x, y, z et la variable indépendante ν, qui, d'après ce qui a été dit n° **455**, pourront toujours se ramener à la forme

$$\frac{dx}{d\nu} + Sx + Ty + Uz = V,$$

$$\frac{dy}{d\nu} + S'x + T'y + U'z = V',$$

$$\frac{dz}{d\nu} + S''x + T''y + U''z = V''.$$

On multipliera respectivement la seconde et la troisième équation par les facteurs indéterminés Φ et Ψ, et on les ajoutera à la première, ce qui donnera

$$\frac{dx}{d\nu} + \Phi\frac{dy}{d\nu} + \Psi\frac{dz}{d\nu} + (S + S'\Phi + S''\Psi)\,x + (T + T'\Phi + T''\Psi)\,y$$
$$+ (U + U'\Phi + U''\Psi)\,z = V + V'\Phi + V''\Psi.$$

On posera ensuite

$x+\Phi y+\Psi z=u$, d'où $x=u-\Phi y-\Psi z$,

$$\frac{dx}{dv}+\Phi\frac{dy}{dv}+\Psi\frac{dz}{dv}=\frac{du}{dv}-\frac{d\Phi}{dv}y-\frac{d\Phi}{dv}z,$$

u désignant une nouvelle variable. Ces valeurs étant substituées dans l'équation précédente, il viendra

$$\frac{du}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)u-y\left[\frac{d\Phi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Phi-(T+T'\Phi+T''\Psi)\right]$$
$$-z\left[\frac{d\Psi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Psi-(U+U'\Phi+U''\Psi)\right]=V+V'\Phi+V''\Psi.$$

Ainsi, déterminant Φ et Ψ de manière à satisfaire aux deux équations

$$\frac{d\Phi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Phi-(T+T'\Phi+T''\Psi)=0,$$
$$\frac{d\Psi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Psi-(U+U\Phi'+U''\Psi)=0;$$

il restera à intégrer

$$\frac{du}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)u=V+V'\Phi+V''\Psi,$$

entre les seules variables u et v. Les équations seront donc résolues si l'on peut trouver des valeurs de Φ et Ψ qui satisfassent aux deux équations dont dépendent ces fonctions.

459. Si l'on admet comme dans le n° 456, que les coefficients S, T, U, S', T', U', S'', T'', U'' des premiers membres des équations proposées soient des nombres constants, on pourra prendre pour Φ et Ψ des valeurs constantes, déterminées par les équations

$$(S+S'\Phi+S''\Psi)\,\Phi-(T+T'\Phi+T''\Psi)=0,$$
$$(S+S'\Phi+S''\Psi)\,\Psi-(U+U'\Phi+U''\Psi)=0,$$

et comme les équations finales donnant les valeurs de Φ et Ψ monteront au troisième degré, on aura trois systèmes de valeurs que nous désignerons respectivement par Φ_1 et Ψ_1, Φ_2 et Ψ_2, Φ_3 et Ψ_3.

L'intégrale de l'équation entre u et v étant d'ailleurs

$$u=e^{-(S+S'\Phi+S''\Psi)v}\left[a+\int dv(U+U'\Phi+U''\Psi).e^{(S+S'\Phi+S''\Psi)v}\right],$$

nous aurons les trois équations primitives

$$x+\Phi_1y+\Psi_1z=e^{-(S+S'\Phi_1+S''\Psi_1)v}\left[a_1+\int dv(U+U'\Phi_1+U''\Psi_1).e^{(S+S'\Phi_1+S''\Psi_1)v}\right]$$
$$x+\Phi_2y+\Psi_2z=e^{-(S+S'\Phi_2+S''\Psi_2)v}\left[a_2+\int dv(U+U'\Phi_2+U''\Psi_2).e^{(S+S'\Phi_2+S''\Psi_2)v}\right]$$
$$x+\Phi_3y+\Psi_3z=e^{-(S+S'\Phi_3+S''\Psi_3)v}\left[a_3+\int dv(U+U'\Phi_3+U''\Psi_3).e^{(S+S'\Phi_3+S''\Psi_3)v}\right],$$

qui détermineront les valeurs de x,y,z en fonction de v.

La même méthode s'applique aux cas où l'on a un plus grand nombre de variables et d'équations différentielles, et l'on voit que ces équations s'intègrent toujours lorsque les coefficients des premiers membres sont constants.

460. Nous avons supposé jusqu'ici que les équations différentielles proposées étaient du premier ordre. Le cas où ces équations sont du second ordre et des ordres supérieurs est ramené au précédent de la manière suivante. Soient par exemple les deux équations du second ordre

$$\frac{d^2x}{dv^2}+A\frac{dx}{dv}+B\frac{dy}{dv}+Cx+Dy=E,$$
$$\frac{d^2y}{dv^2}+A'\frac{dx}{dv}+B'\frac{dy}{dv}+C'x+D'y=E'.$$

On posera $\frac{dx}{dv}=p, \frac{dy}{dv}=q$, p et q désignant de nouvelles variables. On aura alors les équations du premier ordre

$$\frac{dp}{dv}+Ap+Bq+Cx+Dy=E,$$
$$\frac{dq}{dv}+A'p+B'q+C'x+D'y=E',$$
$$\frac{dx}{dv}-p=0,$$
$$\frac{dy}{dv}-q=0.$$

entre les quatre variables x, y, p, q, et la variable indépendante v. Ces équations étant traitées par la méthode des n° 455 et suivants, conduiront aux expressions demandées de x et y.

XXXV. Intégration par séries des fonctions différentielles.

461. Lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir en termes finis, par le moyen des méthodes connues, l'expression de la fonction qui est donnée par une équation différentielle, on peut chercher à obtenir cette expression sous la forme d'un développement en série infinie. Si la série est convergente, l'expression dont il s'agit, sera aussi propre que toute autre, à faire connaître les valeurs numériques de la fonction cherchée.

Le développement en série de la fonction y donnée par l'équation différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0,$$

peut s'obtenir en général au moyen de ce qui a été dit dans le n° 427. Cette équation étant résolue par rapport à $\frac{d^ny}{dx^n}$ donnera les valeurs de ce coefficient différentiel et des coefficients différentiels des ordres supérieurs correspondantes à $x=0$; et en substituant ces valeurs dans l'expression générale

$$y=y_0+\frac{dy_0}{dx}x+\frac{d^2y^0}{dx^2}\frac{x^2}{2}+\frac{d^3y_0}{dx^3}\frac{x^3}{2.3}+\text{etc.},$$

on aura le développement de la fonction y, dans lequel il restera les n coefficients arbitraires $y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$.

Dans les cas particuliers où la supposition de $x=0$ rendrait infinies les valeurs de $\frac{d^ny}{dx^n}$ et des coefficients différentiels des ordres supérieurs, on remarquerait que la formule de Taylor donnée n° 80, devient, en y faisant $x=a$, puis $h=x-a$

$$y=y_a+\frac{dy_a}{dx}(x-a)+\frac{d^2y_a}{dx^2}\frac{(x-a)^2}{2}+\frac{d^3y_a}{dx^3}\frac{(x-a)^3}{2.3}+\frac{d^4y_a}{dx^4}\frac{(x-a)^4}{2.3.4}+\text{etc.},$$

où l'on représente par y_a, $\frac{dy_a}{dx}$, $\frac{d^2y_a}{dx^2}$, etc., les valeurs particulières que prennent $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., lorsqu'on donne à x la valeur a. On déduirait donc de l'équation différentielle proposée les valeurs de $\frac{d^ny_a}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y_a}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2}y_a}{dx^{n+2}}$, etc., que l'on substituerait dans l'expression précédente. On pourrait d'ailleurs attribuer

à a toute valeur qui ne rendrait pas infinies les valeurs des coefficients différentiels de l'ordre n, et des ordres plus élevés.

462. Il est souvent plus simple et plus facile de substituer à l'opération qui vient d'être indiquée, la méthode des coefficients indéterminés. Soit, par exemple, l'équationdu second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}+xy=0.$$

On posera pour satisfaire à cette équation

$$y=A_0x^\alpha+A_1x^{\alpha+1}+A_2x^{\alpha+2}+A_3x^{\alpha+3}+A_4x^{\alpha+4}+\text{etc.},$$

A_0, A_1, A_2, etc., désignant des coefficients constants indéterminés, et α un exposant également indéterminé. Si l'on substitue cette expression de y dans l'équation proposée il viendra

$$\begin{aligned}0=&A_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+A_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1}+A_2(\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha\\&+\left.\begin{matrix}A_3(\alpha+3)(\alpha+2)\\+A_0\end{matrix}\right|x^{\alpha+1}+\left.\begin{matrix}A_4(\alpha+4)(\alpha+3)\\+A_1\end{matrix}\right|x^{\alpha+2}+\text{etc.},\end{aligned}$$

équation où l'on fera disparaître les deux premiers termes du second membre, en supposant $\alpha=0$, et laissant indéterminées les constantes A_0 et A_1. Le troisième disparaîtra en supposant $A_2=0$. Quant aux termes suivants, ils deviendrons nuls en déterminant convenablement les coefficients A_3, A_4, A_5, etc., au moyen des trois premiers. Les valeurs de ces coefficients seront données par les équations

$$-A_3 = \frac{A_0}{2.3}, \quad \text{d'où l'on déduit} \quad A_3 = -\frac{A_0}{2.3}$$

$$-A_4 = \frac{A_1}{3.4} \qquad\qquad A_4 = -\frac{A_1}{3.4}$$

$$-A_5 = \frac{A_2}{4.5} \qquad\qquad A_5 = 0$$

$$-A_6 = \frac{A_3}{5.6} \qquad\qquad A_6 = \frac{A_0}{2.3.5.6}$$

$$-A_7 = \frac{A_4}{6.7} \qquad\qquad A_7 = \frac{A_1}{3.4.6.7}$$

$$-A_8 = \frac{A_5}{7.8} \qquad\qquad A_8 = 0$$

$$-A_9 = \frac{A_6}{8.9} \qquad\qquad A_9 = -\frac{A_0}{2.3.5.6.8.9}$$

$$-A_{10} = \frac{A_7}{9.10} \qquad\qquad A_{10} = -\frac{A_1}{3.4.6.7.9.10}$$

etc. etc.

La série qui donne l'expression cherchée de y est donc

$$y = A_0\left(1 - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} - \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9} + \text{etc.}\right)$$
$$+ A_1\left(x - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} - \frac{x^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \text{etc.}\right).$$

A_0 et A_1 sont les deux constantes arbitraires.

463. Si l'équation proposée était

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{x} = 0,$$

la substitution de l'expression

$$y = A_0x^\alpha + A_1x^{\alpha+1} + A_2x^{\alpha+2} + A_3x^{\alpha+3} + A_4x^{\alpha+4} + \text{etc.}$$

donnerait l'équation de condition

$$0=A_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+\left.\begin{array}{r}A_1(\alpha+1)\alpha\\+A_0\end{array}\right|x^{\alpha-1}+\left.\begin{array}{r}A_2(\alpha+2)(\alpha+1)\\+A_1\end{array}\right|x^{\alpha}$$

$$+\left.\begin{array}{r}A_3(\alpha+3)(\alpha+2)\\+A_2\end{array}\right|x^{\alpha+1}+\text{etc.}$$

On fait disparaître le premier terme en posant $\alpha=0$ ou $\alpha=1$ mais la première hypothèse ne peut être admise parce que le second terme ne pourrait alors disparaître qu'en supposant aussi $A_0=0$. En faisant donc $\alpha=1$, les coefficients différentiels seront déterminés par les équations

$-A_1.2.1=A_0$; d'où l'on déduit $A_1=-\frac{A_0}{1.2}$

$-A_2.3.2=A_1$ $\qquad A_2=\frac{A_0}{1.2^2.3}$

$-A_3.4.3=A_2$ $\qquad A_3=-\frac{A_0}{1.2^2.3^2.4}$

$-A_4.5.4=A_3$ $\qquad A_4=\frac{A_0}{1.2^2.3^2.4^2.5}$ etc.

$-A_5.6.5=A_4$

etc.

Par conséquent l'équation est satisfaite par la valeur

$$y=A_0\left(x-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2^2.3}-\frac{x^4}{1.2^2.3^2.4}+\frac{x^5}{1.2^2.3^2.4^2.5}-\text{etc.}\right).$$

Cette expression ne contenant qu'une seule constante arbitraire, présente bien une infinité de valeurs particulières de la fonction y : mais elle n'est pas l'intégrale générale de l'équation proposée. Il est aisé de reconnaître d'ailleurs que l'on ne peut satisfaire à cette équation par une série ordonnée suivant les puissances descendantes de x.

464. Nous considérerons encore l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0.$$

En posant comme ci-dessus,

$$y=A_0x^\alpha+A_1x^{\alpha+1}+A_2x^{\alpha+2}+A_3x^{\alpha+3}+A_4x^{\alpha+4}+\text{etc.},$$

et substituant cette expression dans l'équation proposée, il viendra

$$\begin{array}{r|r|r|l}
0=A_0\alpha(\alpha-1) & x^{\alpha-2}+A_1(\alpha+1)\alpha & x^{\alpha-1}+A_2(\alpha+2)(\alpha+1) & x^\alpha \\
+A_0\alpha & +A_1(\alpha+1) & +A_2(\alpha+2) & \\
 & & +A_0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l}
+A_3(\alpha+3)(\alpha+2) & x^{\alpha+1}+A_4(\alpha+4)(\alpha+3) & x^{\alpha+2}+\text{etc.} \\
+A_3(\alpha+3) & +A_4(\alpha+4) & \\
+A_1 & +A_2 &
\end{array}$$

On fait disparaître le premier terme du second membre en faisant $\alpha=0$ sans déterminer A_0; mais alors le second terme ne disparaît pas, à moins que l'on ne fasse $A_1=0$. De même on fait disparaître le second terme en posant $\alpha=-1$, le coefficient A_1 demeurant indéterminé, mais alors le premier terme ne disparaîtra pas, à moins qu'on ne suppose $A_0=0$. Si l'on fait donc $\alpha=0$, les coefficients seront déterminés par les équations

$$
\begin{array}{ll}
A_0=A_0, \text{ d'où l'on déduit} & A_0=A_0 \\
A_1=0 & A_1=0 \\
-A_2=\dfrac{A_0}{2+2} & A_2=-\dfrac{A_0}{4}=-\dfrac{A_0}{2^2} \\
-A_3=\dfrac{A_1}{6+3} & A_3=0 \\
-A_4=\dfrac{A_2}{12+4} & A_4=\dfrac{A_0}{4.16}=\dfrac{A_0}{2^2.4^2} \\
-A_5=\dfrac{A_3}{20+5} & A_5=0 \\
-A_6=\dfrac{A_4}{30+6} & A_6=-\dfrac{A_0}{4.16.36}=-\dfrac{A_0}{2^2.4^2.6^2} \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

On satisfera donc à l'équation proposée par la série

$$y=A_0\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}+\text{etc.}\right).$$

Quant à la supposition de $\alpha=-1$, il est aisé de reconnaître qu'elle conduirait à la même série que l'on vient de trouver. On n'obtient encore ici qu'une formule propre à donner des intégrales particulières, mais non l'intégrale générale de l'équation proposée.

465. Lorsque la substitution d'une série ascendante de l'invariable x dans l'équation différentielle ne donne qu'une valeur particulière, cela tient généralement à ce que l'intégrale complète doit contenir des termes affectés du logarithme de cette variable. Ayant trouvé, par exemple, pour l'équation précédente

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0,$$

la valeur particulière

$$Y'=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}+\text{etc.},$$

on posera, pour obtenir l'intégrale complète, conformément à ce qu'on a vu dans les n°s 442 et 443, $y=AY'$, A désignant une fonction de x, ce qui donne

$$\frac{dy}{dx}=A\frac{dY'}{dx}+\frac{dA}{dx}Y',$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A\frac{d^2Y'}{dx^2}+2\frac{dA}{dx}\frac{dY'}{dx}+\frac{d^2A}{dx^2}Y'.$$

Mettant ces valeurs dans l'équation précédente, et supprimant les termes affectés de A dont la somme est nulle, il restera pour déterminer A l'équation

$$Y'\frac{d^2A}{dx^2}+\left(2\frac{dY'}{dx}+\frac{Y'}{x}\right)\frac{dA}{dx}=0;$$

qui devient, en posant $\frac{dA}{dx}=t$,

$$Y'\frac{dt}{dx}+\left(2\frac{dY'}{dx}+\frac{Y'}{x}\right)t=0 \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{t}+\frac{2dY'}{Y'}+\frac{dx}{x}=0,$$

d'où l'on tire $t=\frac{1}{xY'^2}$, et par conséquent $A=\int\frac{dx}{xY'^2}$.

On en conclut que l'expression de l'intégrale complète est

$$y=Y'\left(a+b\int\frac{dx}{xY'^2}\right),$$

a et b étant les deux constantes arbitraires. D'ailleurs

$$\int\frac{dx}{xY'^2}=\int\frac{dx}{x}(1+\alpha x^2+\beta x^4+\text{etc.})=lx+\frac{\alpha x^2}{2}+\frac{\beta x^4}{4}+\text{etc.},$$

α, β, etc., désignant des coefficients numériques qu'il est

facile de déterminer. Cette expression devient donc

$$y=\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\text{etc.}\right)\left[a+b\left(lx+\frac{ax^2}{2}+\frac{6x^4}{4}+\text{etc.}\right)\right].$$

XXXVI. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES ORDINAIRES DU PREMIER ORDRE A TROIS VARIABLES.

466. Soit proposée l'équation différentielle

$$P.dx+Qdy+Rdz=0,$$

dans laquelle P,Q,R désignent des fonctions quelconques des trois variables $x.y,z$. Si cette équation est le résultat immédiat de la différentiation d'une équation primitive $F(x,y,z)=0$, son premier membre satisfera aux conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles du premier ordre à trois variables, et on pourra en trouver l'intégrale, qui devra être complétée par une constante arbitraire.

Mais si l'équation proposée résulte de l'élimination d'une constante entre l'équation primitive $F(x,y,z)=0$, et l'équation différentielle qui s'en déduit immédiatement, ou si l'on a supprimé après la différentiation un facteur commun à tous les termes, elle ne satisfera plus en général aux conditions d'intégrabilité. Néanmoins cette équation ayant été déduite d'une relation donnée entre les trois variables x,y,z, dont deux d'entre elles, par exemple x et y, peuvent être regardées comme indépendantes, et la troisième z comme fonction de ces deux-ci, il s'ensuit que tirant la valeur de dz qui sera

$$dz=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy,$$

cette expression doit satisfaire à la condition générale de l'expression de la différentielle des fonctions de deux variables indépendantes; en sorte que l'on doit avoir

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{P}{R}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{R}\right),$$

ou, en faisant attention que z est contenu dans les fonctions P, Q et R,

$$R\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dP}{dz}\frac{dz}{dy}\right)-P\left(\frac{dR}{dy}+\frac{dR}{dz}\frac{dz}{dy}\right)$$
$$=R\left(\frac{dQ}{dx}+\frac{dQ}{dz}\frac{dz}{dx}\right)-Q\left(\frac{dR}{dx}+\frac{dR}{dz}\frac{dz}{dx}\right).$$

Mettant pour $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ leurs valeurs $-\frac{P}{R}$ et $-\frac{Q}{R}$ et réduisant, il vient

$$P\frac{dR}{dy}-P\frac{dQ}{dz}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{dz}+R\frac{dQ}{dx}-R\frac{dP}{dy}=0.$$

Cette équation exprime la condition nécessaire pour que l'on puisse regarder dans l'équation proposée deux quelconques des variables comme indépendantes, et la troisième comme une fonction des deux autres. On pourra alors considérer l'équation dont il s'agit comme appartenant à une surface.

467. Lorsque l'équation de condition que l'on vient d'obtenir est satisfaite, l'intégration de l'équation proposée dépend uniquement de l'intégration d'une équation à deux variables seulement. En effet, regardons la variable z comme constante, et supposons par conséquent $dz=0$, l'équation proposée se réduirait à

$$Pdx+Qdy=0,$$

qui appartient à une section quelconque faite dans la surface par un plan parallèle au plan des xy, à une distance de ce plan marquée par la valeur constante attribuée à la coordonnée z, dans les fonctions P et Q. Si l'on parvient à intégrer cette équation, il faudra regarder la constante qui complétera cette intégrale comme une fonction de z, et nous représenterons l'intégrale dont il s'agit par

$$\varphi(x, y, z) = \mathrm{Z},$$

Z désignant une fonction de z seule. Or, en différentiant cette dernière équation en y faisant varier x, y, z, il viendra

$$\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy + \frac{d\varphi}{dz}\,dz = d\mathrm{Z},$$

et comme le second membre est une fonction de z seule, il doit en être de même du premier membre. Par conséquent, en éliminant de ce premier membre une des variables x, y, au moyen de l'équation $\varphi(x,y,z)=\mathrm{Z}$, l'autre doit disparaître d'elle-même, en sorte qu'il ne restera qu'une équation différentielle entre z et Z. Cette équation étant intégrée, donnera l'expression de Z en z, avec une constante arbitraire ; et en remplaçant Z par cette expression dans l'équation $\varphi(x,y,z)=\mathrm{Z}$, on aura l'intégrale cherchée.

468. Soit proposée, par exemple, l'équation différentielle suivante,

$$(2xz + z^2)\,dx + 2yzdy - 2(x^2 + y^2 + b)\,dz = 0,$$

qui satisfait à l'équation de condition du n° 466. En y regardant z comme constante elle se réduit à

$$(2x + z^2)\,dx + 2ydy = 0,$$

où les variables sont séparées, et dont l'intégrale est

$$x^2+y^2+xz^2=Z,$$

Z étant la constante arbitraire, que nous regardons ici comme une fonction de z. Différentiant cette dernière équation en faisant tout varier, il vient

$$(2x+z^2)\,dx+2y\,dy+2xz\,dz=dZ\,,$$

que l'on peut changer, en ayant égard à l'équation proposée, en

$$2\frac{x^2+y^2+b}{z}\,dz+2xz\,dz=dZ.$$

Remplaçant dans cette équation y^2 par sa valeur déduite de l'équation $x^2+y^2+xz^2=Z$, la variable x disparaîtra, et il viendra simplement

$$2\frac{Z+b}{z}\,dz=dZ\,,\quad \text{ou}\quad \frac{2dz}{z}=\frac{dZ}{Z+b},$$

équation dont l'intégrale est

$$az^2=Z+b\,,$$

a désignant la constante arbitraire. Mettant donc pour Z la valeur qui se déduit de cette équation dans $x^2+y^2+xz^2=Z$, il viendra

$$x^2+y^2+(x-a)\,z^2+b=0\,,$$

qui est l'intégrale cherchée.

469. Lorsque l'équation différentielle proposée

$$Pdx+Qdy+Rdz=0\,,$$

ne satisfait pas à l'équation de condition du nº 466,

d'où l'on conclut qu'il n'est pas possible d'y regarder deux des variables comme indépendantes, et la troisième comme une fonction de celles-ci, on ne peut attribuer un sens analytique à cette équation qu'en admettant que deux des variables sont liées par une relation inconnue, mais existante. On devra donc supposer, par exemple, que x et y ont entre elles une relation exprimée par une équation telle que $\varphi(x,y)=0$, d'après laquelle l'équation proposée se réduirait à une équation à deux variables seulement, et pourrait être intégrée en conséquence, après la détermination de la fonction φ. Dans un tel cas l'équation dont il s'agit, ne peut pas être regardée comme appartenant à une surface. La fonction z est l'ordonnée des courbes, en nombre infini, que l'on obtiendra après avoir tracé arbitrairement sur le plan des xy les projections de ces courbes qui sont représentées par l'équation $\varphi(x,y)=0$.

XXXVII. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

470. Soient deux variables indépendantes x et y et une troisième variable z qui est regardée comme une fonction des deux premières : $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ représenteront les coefficients différentiels partiels de la fonction z pris respectivement par rapport à x et à y; en sorte que si x augmente de dx, l'accroissement de z sera $\frac{dz}{dx}dx$; et si y augmente de dy, l'accroissement de z sera $\frac{dz}{dy}dy$. Une équation aux différences partielles du premier

ordre entre les trois variables x, y, z exprime en général une relation entre les quantités $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, et peut être représentée par

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

f étant le signe d'une fonction quelconque. Il s'agit de concevoir la signification d'une telle équation, et comment peut être formée l'équation primitive à laquelle elle doit correspondre.

En général, les variables indépendantes x, y peuvent être regardées comme deux abscisses rectangulaires horizontales, et la variable z comme une ordonnée verticale. Ainsi z étant regardée comme une fonction de x et y, une relation entre ces trois variables sera considérée comme l'équation d'une surface définie par l'équation proposée.

Cela posé, étant donnée l'équation

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

supposons que l'on cherche à construire la surface qu'elle doit représenter. On déduira de cette équation la valeur de l'une quelconque des quantités $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ lorsque les quatre autres auront été données ; par conséquent, on peut concevoir que la construction s'opère de la manière suivante. Traçons dans le plan des xz une courbe quelconque que nous regarderons comme l'intersection de la surface cherchée par ce plan. Pour un point

quelconque de cette courbe, on connaîtra x, y dont la valeur est nulle, z et $\frac{dz}{dx}$: l'équation proposée donnant $\frac{dz}{dy}$, la direction du plan tangent à la surface cherchée est déterminée dans toute l'étendue de la courbe dont il s'agit. Si donc, on conçoit un plan mené parallèlement au plan des xz à une distance très-petite Δy, on connaîtra l'intersection de la surface par ce plan avec une exactitude d'autant plus grande que Δy sera plus petite. On pourra se servir de cette intersection pour construire de la même manière, une nouvelle intersection avec un second plan mené à la distance Δy du premier ; et ainsi de suite. Ainsi la surface est en général déterminée dans toute son étendue, au moyen de l'équation différentielle, lorsqu'on s'est donné arbitrairement l'intersection de cette surface par un plan parallèle au plan des xz. Il est évident d'ailleurs qu'elle le serait également si l'on se donnait l'intersection de la surface par un plan parallèle aux yz.

On pourra voir par ce qui précède, que l'équation différentielle proposée appartient à une infinité de surfaces différentes, qui ont toutes un caractère commun exprimé par cette équation. La figure de chaque surface dépend de celle de la courbe arbitraire par laquelle on l'a fait passer. Si l'on veut que l'intégrale de l'équation proposée ait une signification aussi étendue que cette équation elle-même, elle doit représenter toutes les surfaces dont il s'agit. Cette intégrale, outre la condition de satisfaire à l'équation différentielle proposée, doit donc contenir une fonction arbitraire.

471. On reconnaît la vérité de cette proposition en remarquant que si l'on a une équation primitive contenant une fonction indéterminée, on peut toujours en déduire une équation du premier ordre où cette fonction ait entièrement disparu. Soit par exemple l'équation

$$F[x, y, z, \varphi(u)] = 0,$$

dans laquelle F et φ sont des signes de fonction, et u représente une certaine fonction de x, y, z. En différentiant successivement par rapport à x et à y, il viendra

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF}{d.\varphi(u)}\frac{d.\varphi(u)}{du}\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$
$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{dF}{d.\varphi(u)}\frac{d.\varphi(u)}{du}\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Eliminant ensuite $\varphi(u)$ et $\frac{d\varphi(u)}{du}$ entre ces deux équations et l'équation primitive, il restera une équation différentielle du premier ordre dans laquelle la fonction φ n'entrera point. Cette équation exprimera une relation qui subsiste quelle que soit la forme qui, dans l'équation primitive, pourrait être attribuée à la fonction φ.

472. Considérons en général une équation primitive

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dans laquelle a, b désignent deux constantes. En différentiant successivement par rapport à x et à y, on aura les deux équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

et l'on pourra éliminer les constantes a et b, entre ces équations et l'équation primitive. On obtiendra de cette manière une équation différentielle du premier ordre dans laquelle ces constantes auront disparu, et qui par conséquent exprimera une propriété entièrement indépendante des valeurs particulières qui pourraient leur être attribuées. Nous représenterons cette équation par

$$f\left(x, y, z. \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

On voit, en premier lieu, qu'étant donnée l'équation (3), son intégrale, ou l'équation primitive dont elle dérive, devra contenir deux constantes arbitraires.

Mais si l'on regarde a, dans l'équation (1), comme une quantité variable, et b comme une fonction de a, les deux équations différentielles qui en dériveront seront alors

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da}\right)\left(\frac{da}{dx} + \frac{da}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$
$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} + \left(\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da}\right)\left(\frac{da}{dy} + \frac{da}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Or, ces deux équations ne différeront point des équations (2), pourvu seulement que l'on ait l'équation

$$\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da} = 0.$$

Donc l'équation (1), conduira toujours à la même équation aux différences partielles (3), lorsqu'on y regardera a comme variable, et b comme une fonction quelconque de a, pourvu que a soit pris de manière à satisfaire à l'équation $\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db}\frac{db}{da} = 0$.

Il suit de là, qu'étant donnée une équation aux différences partielles du premier ordre, si l'on a trouvé une équation primitive $F=0$ avec deux constantes arbitraires a et b, qui satisfasse à cette équation, on aura une solution beaucoup plus étendue, en prenant $b=\varphi(a)$, et déterminant a par l'équation $\frac{dF}{da}+\frac{dF}{db}\frac{db}{da}=0$. La fonction φ est la fonction arbitraire qui donne à la solution la généralité nécessaire.

473. Il est bon de remarquer que l'on pourrait également, dans l'équation primitive (1), regarder a et b comme deux quantités variables indépendantes l'une de l'autre, et que l'on aurait alors les deux équations dérivées,

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx}+\frac{da}{dz}\frac{dz}{dx}\right)+\frac{dF}{db}\left(\frac{db}{dx}+\frac{db}{dz}\frac{dz}{dx}\right)=0,$$
$$\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{dz}{dy}\right)+\frac{dF}{db}\left(\frac{db}{dy}+\frac{db}{dz}\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

que l'on ramène aux équations (2) en posant

$$\frac{dF}{da}=0, \quad \text{et} \quad \frac{dF}{db}=0.$$

Par conséquent si l'équation primitive $F=0$, contenant les deux constantes arbitraires a et b, satisfait à une équation aux différences partielles proposées, on voit que l'on y satisfera encore en mettant à la place de a et b dans cette équation les deux valeurs en x,y,z de ces quantités qui résultent des équations $\frac{dF}{da}=0$, $\frac{dF}{db}=0$. Mais comme le résultat que l'on obtiendrait ainsi, ne contient pas de fonction arbitraire, il ne

donne qu'une solution particulière de l'équation proposée.

474. Dans la géométrie, l'équation (1), avec deux constantes arbitraires, représente une infinité de surfaces correspondantes à toutes les valeurs que l'on peut attribuer à ces constantes, et auxquelles appartient toujours l'équation aux différences partielles (3). Lorsque l'on prend $b=\varphi(a)$, φ étant le signe d'une fonction quelconque, on considère la série de surfaces qui résulte de la fonction φ lorsque l'on attribue à a toutes les valeurs possibles depuis $-\frac{1}{0}$ jusqu'à $+\frac{1}{0}$. Or, mettant à la place de a, dans l'équation $F[x,y,z,a,\varphi(a)]=0$, la valeur $a+da$, le résultat, que nous représentons par $F+\frac{dF}{da}da=0$, appartiendra à une surface comprise dans cette série, et infiniment voisine de la surface représentée par l'équation $F=0$. Donc le système de ces deux équations $F=0$ et $F+\frac{dF}{da}da=0$, ou simplement $F=0$ et $\frac{dF}{da}=0$ (puisque la première fait disparaître le premier terme de la seconde quand on les regarde comme subsistant ensemble), appartient à la ligne d'intersection des deux surfaces consécutives, ligne que nous désignerons, d'après *Monge*, par le nom de *caractéristique*. Et si l'on élimine entre les deux équations dont il s'agit, la quantité a, le résultat, qui sera une équation entre x,y,z, appartiendra à la surface lieu de ces lignes d'intersection, c'est-à-dire à la surface enveloppe des surfaces qui résultent de l'équation $F[x,y,z,a,\varphi(a)]=0$, quand on y donne à a toutes les valeurs possibles. Or, l'équation différen-

tielle proposée doit évidemment appartenir à cette surface enveloppe, puisque le plan tangent étant toujours commun aux enveloppées et à l'enveloppe, les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ qui déterminent la direction de ce plan, leur doivent également être communes. Après que l'on a mis $\varphi(a)$ à la place de b, l'équation $\frac{dF}{da}=0$ ne diffère point de l'équation $\frac{dF}{da}+\frac{dF}{db}\frac{db}{da}=0$ du n° 472. On voit donc que la solution générale de l'équation proposée est exprimée par le système des équations $F(x,y,z,a,b)=0$ et $\frac{dF}{da}+\frac{dF}{db}\frac{db}{da}=0$, en mettant une fonction quelconque $\varphi(a)$ à la place de b, puis éliminant a entre ces deux équations.

475. De plus, si dans l'équation $F(x,y,z,a,b)=0$ on fait varier la quantité a seule, ce qui donne $F+\frac{dF}{da}da=0$; puis la quantité b seule, ce qui donne $F+\frac{dF}{db}db=0$, le système des équations $F=0$ et $\frac{dF}{da}=0$ représentera une caractéristique appartenant à une certaine surface enveloppe; et le système des équations $F=0$ et $\frac{dF}{db}=0$ représentera une autre caractéristique appartenant à une autre surface enveloppe infiniment voisine de la première. Donc le système des trois équations $F=0$, $\frac{dF}{da}=0$, $\frac{dF}{db}=0$ appartiendra aux points d'intersection de ces deux caractérisques; et par conséquent, si l'on élimine a et b entre ces trois équations, l'équation

en x, y, z qui en résultera, représentera la surface lieu de tous ces points d'intersection, c'est-à-dire une surface qui touche et enveloppe elle-même toutes les enveloppes dont il a été question ci-dessus, et qui est touchée par toutes les caractéristiques ; surface à laquelle l'équation différentielle proposée doit encore appartenir, mais qui ne répond évidemment qu'à une solution particulière de cette équation.

Nous ajouterons qu'il existe généralement plusieurs équations différentes, analogues à l'équation (1) du n° 472, contenant deux constantes arbitraires, qui peuvent conduire à la même équation différentielle (3), et produire les mêmes surfaces enveloppes auxquelles répondront l'intégrale générale de cette équation et la solution particulière dont il vient d'être question.

Intégration des équations linéaires aux différences partielles du premier ordre.

476. Une équation aux différences partielles est linéaire lorsque les coefficients différentiels ne s'y trouvent qu'à la première puissance. Le cas le plus simple est celui où ces coefficients sont multipliés par des constantes. Les équations de ce genre ont la propriété d'être satisfaites par la somme d'un nombre quelconque de valeurs particulières, propriété qui donne immédiatement l'intégrale.

Soit en effet l'équation

$$P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=0,$$

dans laquelle P et Q, sont des nombres constants. Pre-

nant pour valeur particulière (m et n étant des constantes)

$$z = e^{mx+ny}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dx} = m.e^{mx+ny}, \quad \frac{dz}{dy} = n.e^{mx+ny},$$

et substituant cette valeur dans l'équation proposée, il vient

$$mP + nQ = 0, \qquad \text{d'où} \qquad n = -\frac{mP}{Q}.$$

La valeur $z = e^{m\left(x - \frac{Py}{Q}\right)}$, ou $z = e^{m(Qx-Py)}$, dans laquelle m demeure indéterminée, satisfait donc à l'équation proposée. Ainsi, l'on peut prendre pour l'expression de la fonction z une série formée d'un nombre quelconque de termes, telle que

$$z = A_1 e^{m_1(Qx-Py)} + A_2 e^{m_2(Qx-Py)} + A_3 e^{m_3(Qx-Py)} + \text{etc.},$$

dans laquelle m_1, m_2, m_3, etc., A_1, A_2, A_3, etc., désignent des constantes entièrement arbitraires. Or, il est visible qu'une telle série équivaut à une fonction arbitraire de la quantité $Qx - Py$ qui se trouve dans tous les termes. La formule précédente peut donc s'écrire

$$x = \varphi(Qx - Py),$$

φ étant le signe d'une fonction arbitraire, et l'on aura ainsi l'intégrale générale de l'équation proposée. On vérifie en effet, que cette expression de z satisfait à l'équation dont il s'agit.

477. L'équation

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = z,$$

dans laquelle P, Q désignent toujours des nombres constants, s'intègre de la même manière. La substitution de la valeur particulière $z=e^{mx+ny}$ donne pour équation de condition

$$mP+nQ=1, \quad \text{d'où} \quad m=\frac{1-nQ}{P}, \quad \text{ou} \quad n=\frac{1-mP}{Q}.$$

Ainsi les expressions

$$z=e^{\frac{y}{Q}+m\left(x-\frac{Py}{Q}\right)} \quad \text{et} \quad z=e^{\frac{x}{P}+n\left(y-\frac{Qx}{P}\right)},$$

dans lesquelles les constantes m ou n demeurent arbitraires, satisferont à l'équation proposée. Cette équation sera également satisfaite par les valeurs

$$z=e^{\frac{y}{Q}}.e^{m(Qx-Py)} \quad \text{et} \quad z=e^{\frac{x}{P}}.e^{n(Py-Qx)},$$

et par conséquent par les deux séries

$$z=e^{\frac{y}{Q}}\left[A_1e^{m_1(Qx-Py)}+A_2e^{m_2(Qx-Py)}+A_3e^{m_3(Qx-Py)}+\text{etc.}\right],$$

$$z=e^{\frac{x}{P}}\left[B_1e^{n_1(Py-Qx)}+B_2e^{n_2(Py-Qx)}+B_3e^{n_3(Py-Qx)}+\text{etc.}\right],$$

dans lesquelles A_1, A_2, etc., m_1, m_2, etc., B_1, B_2, etc., n_1, n_2, etc., représentent des coefficients arbitraires. Ces séries équivalent aux expressions

$$z=e^{\frac{y}{Q}}.\varphi(Qx-Py), \quad x=e^{\frac{x}{P}}.\psi(Py-Qx),$$

φ et ψ étant les signes de fonctions arbitraires. Il est aisé de reconnaître que la même surface peut être également représentée par ces deux expressions. L'une ou l'autre est l'intégrale générale de l'équation proposée.

478. Considérons maintenant l'équation

$$P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=R,$$

dans laquelle P,Q,R, désignent des fonctions quelconques des variables x,y,z. Représentons par

$$f(x,y,z)=0,$$

l'intégrale générale de cette équation qui doit contenir une fonction arbitraire de ces variables. En la différentiant successivement par rapport à x et à y, il viendra

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}=0,\qquad \text{d'où}\qquad \frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}},$$

$$\frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dy}=0,\qquad \text{d'où}\qquad \frac{dz}{dy}=-\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}};$$

et comme ces valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ doivent satisfaire à l'équation proposée, on trouve, en les y substituant, l'équation

$$P\frac{df}{dx}+Q\frac{df}{dy}+R\frac{df}{dz}=0.$$

D'ailleurs, en différentiant complétement l'équation $f(x,y,z)=0$, on a

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0.$$

Prenant dans cette équation la valeur de $\frac{df}{dx}$ et la sub-

stituant dans l'équation précédente, il viendra

$$(\mathrm{P}dy-\mathrm{Q}dx)\frac{df}{dy}+(\mathrm{P}dz-\mathrm{R}dx)\frac{df}{dz}=0.$$

Or, la fonction $f(x,y,z)$ devant contenir une fonction arbitraire des variables x,y,z, il est nécessaire que l'équation précédente soit satisfaite, quelles que soient les valeurs des fonctions $\frac{df}{dy}$ et $\frac{df}{dz}$; d'où l'on conclut que l'on doit avoir séparément les équations

$$\mathrm{P}dy-\mathrm{Q}dx=0,$$
$$\mathrm{P}dz-\mathrm{R}dx=0,$$

lesquelles, par l'élimination de dx, donnent

$$\mathrm{Q}dz-\mathrm{R}dy=0.$$

Ces trois équations aux différences ordinaires, dont deux quelconques entraînent la troisième, résultent nécessairement de l'existence de l'équation aux différences partielles proposée, et subsistent toujours avec elle. Admettons que de ces équations, ou d'une combinaison quelconque de ces équations, on puisse déduire par l'intégration deux équations primitives contenant chacune une constante arbitraire, et que nous désignerons par

$$\mathrm{M}=a \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}=b,$$

a et b étant les deux constantes arbitraires, et M,N des fonctions de x,y,z. On pourra tirer des deux équations $\mathrm{M}=a$, $\mathrm{N}=b$, les valeurs de x et y en z, et les substituant dans l'équation $f(x,y,z)=0$, où il ne se trouverait plus alors que la variable z avec les constantes arbi-

traires a,b, et d'autres constantes non arbitraires. Mais puisque l'on doit avoir $df=0$, il est nécessaire que la variable z disparaisse de cette équation par suite de la substitution des valeurs de x et de y. Ainsi l'équation $f(x.y,z)=0$ doit se réduire uniquement à une relation entre les quantités a, b; relation que nous pouvons représenter par

$$\Phi(a,b)=0,$$

Φ désignant une fonction entièrement arbitraire. Et comme a et b peuvent être remplacées respectivement par leurs valeurs M et N en fonction de x,y,z, on voit que l'intégrale cherchée sera

$$\Phi(\mathrm{M},\mathrm{N})=0; \qquad \text{ou si l'on veut} \qquad \mathrm{N}=\varphi(\mathrm{M}),$$

φ désignant aussi une fonction arbitraire

479. Les notions géométriques indiquées dans le n° 474, conduisent au même résultat. Remarquons qu'à l'équation proposée

$$\mathrm{P}\frac{dz}{dx}+\mathrm{Q}\frac{dz}{dy}=\mathrm{R},$$

se réunit toujours l'équation générale

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy.$$

Eliminant $\frac{dz}{dx}$, ou $\frac{dz}{dy}$, on trouve les deux équations distinctes

$$(\mathrm{P}dy-\mathrm{Q}dx)\frac{dz}{dx}=\mathrm{R}dy-\mathrm{Q}dz,$$

$$(\mathrm{P}dy-\mathrm{Q}dx)\frac{dz}{dy}=\mathrm{P}dz-\mathrm{R}dx,$$

qui doivent nécessairement être satisfaites d'elles-mêmes; car autrement on en tirerait des valeurs déterminées de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ en x, y, z, ce qui est impossible, puisque l'équation proposée ne peut déterminer la direction du plan tangent en un point donné quelconque, attendu que par ce point on peut faire passer une infinité de surfaces représentées par l'équation proposée.

Donc on a séparément les trois équations

$$Pdy - Qdx = 0,$$
$$Pdz - Rdx = 0,$$
$$Qdz - Rdy = 0,$$

dont deux quelconques entraînent la troisième. Comme les relations exprimées par ces équations dérivent de l'équation différentielle proposée, la courbe à laquelle elles appartiennent, doit résulter de l'intersection de deux des surfaces auxquelles appartient l'équation proposée elle-même; et par conséquent cette courbe est celle que l'on a désignée dans le n° 474, sous le nom de caractéristique. Si l'on déduit des équations différentielles précédentes ses équations en termes finis, sous la forme

$$M = a, \qquad N = b,$$

elles représenteront toutes les caractéristiques possibles en y faisant varier à volonté les constantes a et b. Mais si l'on regarde b comme une fonction quelconque φ de la quantité a, les deux équations

$$M = a, \qquad N = \varphi(a),$$

ne représenteront plus que la série des caractéristiques qui sera déterminée par la nature de la fonction φ lors-

qu'on fera varier a depuis $-\frac{1}{0}$ jusqu'à $+\frac{1}{0}$. Enfin si l'on élimine a entre ces deux dernières équations, le résultat de cette élimination, qui est

$$N=\varphi(M),$$

appartiendra à la surface lieu de cette série de caractéristiques, c'est-à-dire, vu l'indétermination de la fonction φ, à l'une quelconque des surfaces enveloppes auxquelles appartient l'équation proposée, et qui sont représentées par son intégrale générale.

480. On a supposé, dans ce qui précède, que l'on pourrait intégrer deux des équations de la caractéristique; ou deux équations quelconques résultant de la combison de celle-ci. Cette intégration n'est pas toujours possible, parce que les trois variables x,y,z se trouvent à la fois dans les équations dont il s'agit, tandis qu'elles ne contiennent que les différentielles de deux d'entre elles. Mais l'on peut toujours néanmoins concevoir l'intégrale générale déduite de ces équations sous la forme à laquelle on est parvenu dans les numéros précédents. En effet, si l'on considère deux de ces équations, telles que

$$Pdz-Rdx=0,$$
$$Qdz-Rdy=0,$$

on remarquera que puisqu'elles appartiennent à une courbe, on ne peut plus y regarder qu'une seule des variables comme indépendante. Prenons, par exemple, z pour variable indépendante : ces deux équations contiendront, outre les variables x, y, z, l'une $\frac{dx}{dz}$,

l'autre $\frac{dy}{dz}$. Différentiant la première on aura une équation du second ordre contenant $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ et $\frac{d^2x}{dz^2}$. On a donc maintenant trois équations entre lesquelles on peut éliminer y et $\frac{dy}{dz}$: le résultat de l'élimination sera une équation aux différences ordinaires du second ordre entre les variables x et z seules.

Cette équation, conformément à ce qu'on a vu n° 474, a nécessairement deux intégrales du premier ordre ayant chacune une constante arbitraire. Admettons que l'on obtienne ces intégrales qui contiendront toutes deux $\frac{dx}{dz}$. On pourra éliminer cette fonction au moyen de l'équation $P-R\frac{dx}{dz}=0$, et il restera par conséquent deux équations contenant chacune les variables x, y, z et une constante arbitraire. Mettant ces deux équations sous la forme

$$M=a, \qquad N=\varphi(a),$$

elles donneront comme ci-dessus pour l'intégrale cherchée

$$N=\varphi(M).$$

On voit par là que l'intégration de l'équation linéaire aux différences partielles du premier ordre se ramène toujours à l'intégration d'une équation aux différences ordinaires du second ordre à deux variables.

481. La méthode exposée dans le n° 478, s'applique également aux cas où l'équation aux différences partielles proposée contient un plus grand nombre de variables.

Si cette équation est

$$P\frac{dv}{dx}+Q\frac{dv}{dy}+R\frac{dv}{dz}=T,$$

nous représenterons son intégrale générale par

$$f(v,x,y,z)=0.$$

En la différentiant successivement par rapport aux variables x,y,z, on en déduira

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dv}},\quad \frac{dv}{dy}=-\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dv}},\quad \frac{dv}{dz}=-\frac{\frac{df}{dz}}{\frac{df}{dv}},$$

ce qui donne, en mettant ces valeurs dans l'équation primitive

$$T\frac{df}{dv}+P\frac{df}{dx}+Q\frac{df}{dy}+R\frac{df}{dz}=0.$$

On a d'ailleurs, en faisant varier d'une manière quelconque les variables v,x,y,z,

$$\frac{df}{dv}dv+\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0.$$

Eliminant $\frac{df}{dv}$ entre cette dernière équation et la précédente, on trouvera

$$(Tdx-Pdv)\frac{df}{dx}+(Tdy-Qdv)\frac{df}{dy}+(Tdz-Rdv)\frac{df}{dz}=0,$$

équation qui sera satisfaite sans déterminer la fonction f, si l'on pose

$$Tdx-Pdv=0,$$
$$Tdy-Qdv=0,$$
$$Tdz-Rdv=0;$$

d'où résultent les trois autres équations

$$\begin{aligned} Pdy - Qdx &= 0, \\ Pdz - Rdx &= 0, \\ Qdz - Rdy &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations aux différences ordinaires établissent donc entre les variables v, x, y, z, les relations nécessaires pour que la fonction primitive $f(v, x, y, z)$ ait sa différentielle coustamment nulle, ou ne puisse contenir que des constantes. Si donc on trouve pour trois quelconques des équations dont il s'agit, trois intégrales telles que

$$L = a, \qquad M = b, \qquad N = c,$$

a, b, c désignant les constantes arbitraires, la substitution dans $f(v, x, y, z)$, des valeurs des trois variables déduites de ces intégrales fera nécessairement disparaître la quatrième, en sorte que cette fonction deviendra une fonction de a, b, c que nous désignerons par

$$\Phi\,(a, b, c).$$

Mettant ensuite pour a, b, c leurs valeurs en v, x, y, z, on aura pour l'intégrale demandée l'équation

$$\Phi(L, M, N) = 0, \qquad \text{ou} \qquad N = \varphi(L, M).$$

On opérerait d'une manière semblable si le nombre des variables indépendantes était plus considérable.

482. On doit distinguer le cas où un terme manque dans l'équation aux différences partielles

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R,$$

parce qu'alors l'intégration ne dépend plus que de celle

d'une équation aux différences ordinaires du premier ordre.

Supposons, par exemple, que le premier terme manque, ou que l'on ait $P=0$. Les équations de la caractéristique des nos 478 et 479, se réduisent à

$$dx=0,$$
$$Qdz-Rdy=0.$$

La première donne

$$x=a,$$

a désignant une constante arbitraire, ce qui indique que la caractéristique se trouve constamment dans un plan perpendiculaire à l'axe des x. x étant constante, on ne regardera plus comme variables dans la seconde équation que y et z. Soit

$$N=\varphi(a),$$

l'intégrale de cette équation. Mettant x à la place de a dans le second membre, l'intégrale cherchée sera donc

$$N=\varphi(x).$$

483. Nous pouvons appliquer la méthode précédente aux cas simples traités nos 476 et 477. Dans le cas du no 476, P et Q sont constantes, et $R=0$. Les équations de la caractéristique deviennent

$$Pdy-Qdx=0,$$
$$dz=0.$$

Leurs intégrales sont

$$Py-Qx=a,$$
$$z=\varphi(a).$$

L'intégrale générale cherchée est donc, conformément à ce qu'on a vu dans le no 478, et comme on l'a trouvée no 475,

$$z=\varphi(Py-Qx).$$

484. Dans le cas du n° 477, l'équation proposée étant

$$P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=z,$$

P et Q sont constantes et $R=z$. Les équations de la caractéristique deviennent

$$Pdy-Qdx=0,$$
$$Pdz-zdx=0,$$
$$Qdz-zdy=0.$$

Elles s'intègrent toutes trois, et donnent pour intégrales

$$Py-Qx=a,$$

$$Plz-x=const. \quad \text{ou} \quad z.e^{-\frac{x}{P}}=b,$$

$$Plz-y=const. \quad\quad z.e^{-\frac{y}{Q}}=c,$$

a,b,c, désignant trois constantes arbitraires. Ainsi, conformément à ce qu'on a vu n° 478, on pourra prendre pour l'intégrale cherchée

$$z.e^{-\frac{x}{P}}=\varphi(Py-Qx) \quad \text{ou} \quad z.e^{-\frac{y}{Q}}=\psi(Py-Qx),$$

φ et ψ désignant toujours des fonctions arbitraires, ce qui s'accorde avec le résultat obtenu d'une autre manière n° 477. Quant à la troisième équation qui résulterait de la combinaison de la seconde des deux équations de la caractéristique avec la troisième, et qui serait

$$z.e^{-\frac{y}{Q}}=\varpi\left(z.e^{-\frac{x}{P}}\right),$$

ϖ étant le signe d'une fonction arbitraire, elle est comprise dans les deux autres, et ne donne rien de plus. En

effet, celles-ci indiquant que $z.e^{-\frac{x}{P}}$ et $z.e^{-\frac{y}{Q}}$ sont toutes deux fonctions de la même quantité Py—Qx, il en résulte nécesairement que les deux quantités dont il s'agit, sont fonctions l'une de l'autre. On a déjà remarqué d'ailleurs que ces deux premières équations expriment la même chose, et équivalent entièrement l'une à l'autre.

485. Soit, par exemple, l'équation très-simple

$$y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0.$$

Les équations de la caractéristique se réduisent à

$$ydy+xdx=0, \quad \text{d'où} \quad y^2+x^2=a,$$
$$dz=0, \quad\quad z=\varphi a.$$

L'intégrale de l'équation proposée est donc

$$z=\varphi(x^2+y^2),$$

φ désignant une constante arbitraire. En effet, l'équation $y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0$ étant considérée dans la géométrie, exprime que la projection sur le plan des xy de la normale à la surface à laquelle appartient cette équation passe toujours par l'origine des coordonnées; ou, si l'on veut, que la normale rencontre toujours l'axe des z. Cette propriété convient à toute surface de révolution dont l'axe coïncide avec l'axe des z, et ne convient qu'à une surface de ce genre. Or, il est visible que l'équation primitive $z=\varphi(x^2+y^2)$ exprimant que l'ordonnée ne varie pas lorsque la quantité x^2+y^2 demeure constante, ou que l'intersection de la surface par un plan

perpendiculaire à l'axe des z est un cercle, appartient également à toute surface de révolution décrite autour de l'axe des z par une ligne quelconque. Cette équation a le même degré de généralité que l'équation différentielle.

Une équation analogue à l'équation désignée par $F(x,y,z,a,b)=0$ dans le n° 472, est ici

$$x^2+y^2+(z-a)^2=b^2,$$

qui représente une surface sphérique quelconque dont le centre est placé dans l'axe des z. Si l'on prend en effet, les deux équations aux différences partielles du premier ordre, qui seront

$$x+(z-a)\frac{dz}{dx}=0, \qquad y+(z-a)\frac{dz}{dy}=0,$$

ce qui fait disparaître immédiatement la constante b, et si l'on élimine entre elles la constante a, on trouvera l'équation proposée $y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0$. Mais cette dernière équation n'appartient pas seulement à toute sphère dont le centre est placé sur l'axe des z. Elle appartient également à toute surface enveloppe des positions successives qu'occuperait une sphère dont le centre se déplacerait sur l'axe des z par la variation de la constante a, et dont le rayon b varierait en même temps suivant une loi quelconque exprimée par la relation $b=\varphi(a)$. Cette surface enveloppe, qui serait donnée par l'élimination de a entre les deux équations

$$x^2+y^2+(z-a)^2=\varphi(a), \qquad -2(z-a)=\frac{d.\varphi(a)}{da},$$

après la détermination de la fonction φ, serait évidemment une surface de révolution dont l'axe coïnciderait avec l'axe des z. D'ailleurs la seconde des équations précédentes donne évidemment z fonction de a, ou $a = \mathrm{F}(z)$. Mettant pour a cette valeur dans la première, on en déduira comme ci-dessus, $z = \Phi(x^2+y^2)$.

On peut aussi regarder comme une intégrale particulière de l'équatiou aux différences partielles proposée l'équation

$$x^2+y^2-a^2(z-b)^2=0,$$

qui représente la surface d'un cône droit quelconque dont l'axe coïncide avec l'axe des z. La constante b est l'ordonnée du centre du cône, et la constante a la tangente de l'angle compris entre l'axe des z et l'arête. En différentiant successivement par rapport à x et à y, il vient

$$x-a^2(z-b)\frac{dz}{dx}=0, \qquad y-a^2(z-b)\frac{dz}{dy}=0,$$

équations qui, par l'élimination des constantes a et b, donnent $y\dfrac{dz}{dx}-x\dfrac{dz}{dy}=0$. L'enveloppe des positions successives qu'occuperait le cône en faisant varier a dans l'équation $x^2+y^2-a^2[z-\varphi(a)]^2=0$ est évidemment une surface de révolution autour de l'axe des z dont la figure dépend de la fonction φ, et à laquelle appartiendra également l'équation différentielle proposée. L'équation de cette surface de révolution se trouvera en éliminant a entre les deux équations

$$x^2+y^2-a^2[z-\varphi(a)]^2=0, \quad \text{et} \quad z-\varphi(x)+a\frac{d.\varphi(a)}{da}=0.$$

Or, la seconde indique que z est une fonction quelcon-

que de a, et par conséquent a une fonction quelconque de z : d'où l'on voit par la première que z doit être une fonction quelconque de x^2+y^2, comme on l'a trouvé ci-dessus.

486. Considérons encore l'équation

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=z.$$

Les équations de la caractéristique seront

$$xdy-ydx=0,$$
$$xdz-zdx=0,$$
$$ydz-zdy=0.$$

Toutes trois sont immédiatement intégrables, et on trouve en les intégrant

$$\frac{y}{x}=a, \qquad \frac{z}{x}=b, \qquad \frac{z}{y}=c,$$

a,b,c designant toujours des constantes arbitraires. On peut donc prendre pour l'intégrale de l'équation proposée l'une ou l'autre des trois équations

$$\frac{z}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \frac{z}{y}=\psi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \frac{z}{y}=\varpi\left(\frac{z}{x}\right),$$

dont la troisième est comprise dans les deux premières. Ainsi l'intégrale générale se forme ici de l'une ou de l'autre des expressions

$$z=x.\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad z=y.\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dans la géométrie, l'équation proposée

$$x\frac{dz}{dy}+y\frac{dz}{dx}-z=0,$$

exprime que les plans tangents à la surface à laquelle appartient cette équation passent tous par l'origine des coordonnées, propriété qui convient à toute surface conique dont cette origine est le centre ou sommet, et qui ne convient qu'à ces surfaces. Or, il est visible que les équations $\frac{z}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, ou $\frac{z}{y}=\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ caractérisent également les surfaces dont il s'agit, puisqu'elles expriment que les rapports $\frac{z}{x}$ ou $\frac{z}{y}$ demeurent constants en même temps que le rapport $\frac{y}{x}$; ou si l'on veut, que tout plan passant par l'axe des z coupe la surface suivant une ligne droite.

L'équation analogue à l'équation $F(x,y,z,a,b)=0$ du n° 472, est ici

$$ax+by-z=0,$$

qui appartient à un plan quelconque passant par l'origine des coordonnées, lorsqu'on y regarde a et b comme des constantes arbitraires. Ses deux équations différentielles du premier ordre sont

$$a-\frac{dz}{dx}=0, \qquad \text{et} \qquad b-\frac{dz}{dy}=0,$$

et donnent par l'élimination de a et b l'équation proposée; cette équation appartient non-seulement à ce plan, mais à toute surface enveloppe de l'espace que le plan parcourrait en le faisant mouvoir par la variation des constantes a et b, sans qu'il cessât de passer par l'origine des coordonnées, surface qui serait évidemment une surface conique dont l'origine des coordonnées serait le centre. On en aurait l'équation en prenant $b=\varphi(a)$, et éliminant a entre les deux équations

$$ax+\gamma(a)\,y-z=0 \qquad \text{et} \qquad x+\frac{d.\gamma(a)}{da}.y=0,$$

Or, la seconde donne $\frac{x}{y}=$ *fonction* de a, ou $a=$ *fonction* de $\frac{x}{y}$. On déduira donc de la première $\frac{z}{y}=$ *fonction* de $\frac{x}{y}$, conformément à ce qu'on a trouvé ci-dessus.

XXXVIII. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES, LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS, D'UN ORDRE QUELCONQUE.

487. Ces équations méritent une attention particulière, parce que c'est par leur moyen que les géomètres ont exprimé, dans les cas les plus simples, et que l'on peut appeler normaux, les lois générales des principaux phénomènes dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle. Elles ont pour caractère propre de pouvoir toujours être satisfaites par une infinité de solutions particulières, comprises dans une même formule, que l'on peut regarder comme une sorte de type analytique, auquel appartient la propriété dont l'équation différentielle est l'expression. L'ensemble de ces solutions donne sur-le-champ une intégrale générale dans laquelle il se trouve des quantités arbitraires, qu'il s'agit de déterminer ensuite d'une manière conforme aux conditions spéciales appartenant à chaque question.

Considérons, par exemple, l'équation du second ordre suivante entre les deux variables indépendantes x,y et la variable z supposée fonction des deux autres,

$$\mathrm{P}\frac{d^2z}{dx^2}+\mathrm{Q}\frac{d^2z}{dxdy}+\mathrm{R}\frac{d^2z}{dy^2}+\mathrm{S}\frac{dz}{dx}+\mathrm{T}\frac{dz}{dy}+z=0,$$

dans laquelle P,Q,R,S,T représentent des quantités constantes quelconques. Nous aurons ici pour la valeur particulière qui satisfait à cette équation

$$z=e^{mx+ny},$$

m,n désignant des constantes, pourvu que ces constantes satisfassent elles-mêmes à l'équation de condition

$$Pm^2+Qmn+Pn^2+Sm+Tn+1=0;$$

et comme cette équation permet de prendre arbitrairement l'une des deux quantités m ou n; on voit qu'il existe une infinité de systèmes de valeurs réelles ou imaginaires qui peuvent être attribuées à ces deux quantités, avec la condition de rendre l'expression $z=e^{mx+ny}$ propre à vérifier l'équation proposée.

Cette équation serait également vérifiée par la somme d'un nombre quelconque de valeurs semblables à la précédente, affectées chacune de coefficients constants quelconques. On peut donc écrire

$$z=Ae^{mx+ny}+A_1e^{m_1x+n_1y}+A_2e^{m_2x+n_2y}+\text{etc.},$$

et cette expression sera l'intégrale générale de l'équation proposée, si la série comprend tous les systèmes en nombre infini de valeurs de m et n qui satisfont ensemble à l'équation de condition précédente. Les coefficients constants A, A_1, A_2, etc., restent entièrement arbitraires. Cette expression de z doit être regardée comme ayant le même degré de généralité que l'équation différentielle elle-même.

Ces notions peuvent évidemment être étendues à toute équation différentielle du même genre, quel que

soit le nombre des variables indépendantes et l'ordre de l'équation.

488. Les questions qui ont été résolues par l'intégration des équations aux différences partielles, appartenaient principalement à la théorie du mouvement de la chaleur, ou à la mécanique. Dans les premières, la température d'un point donné d'un corps est regardée comme une fonction du temps et des trois coordonnées de ce point. L'équation différentielle exprime certaines relations qui doivent subsister entre les coefficients différentiels partiels de cette fonction, relations qui dérivent immédiatement du principe de la communication de la chaleur et qui sont communes à toutes les questions. L'intégrale doit satisfaire à ces relations, et de plus à certaines conditions particulières, qui dépendent de la figure du corps, du mode d'échauffement ou de refroidissement, enfin de l'état initial des températures des divers points. Dans les questions de mécanique, où l'on considère le mouvement d'un système de corps, on regarde les coordonnées variables des points qui se déplacent, comme des fonctions du temps et de leurs coordonnées initiales. Les équations différentielles expriment les lois générales du mouvement. Les intégrales doivent satisfaire à ces équations, aux conditions particulières du système, et représenter, quand on y suppose le temps nul, l'état initial de repos ou de mouvement dans lequel ce système se trouvait à l'instant d'où le temps est compté. Pour donner, dans les cas les plus simples, une idée de la manière dont ces intégrales se forment, on considérera les questions suivantes.

489. Concevons, comme dans le n° 448, une barre

cylindrique ou prismatique dont les dimensions transversales sont très-petites. Admettons que cette barre, d'une longueur déterminée, ait été primitivement échauffée d'une manière quelconque, puis placée dans un milieu dont la température constante est zéro, et que ses deux extrémités soient aussi maintenues constamment, par une cause quelconque, à la température zéro. Il s'agit, l'état de température initial de la barre étant donné, de connaître les variations que subiront avec le temps les températures des divers points, jusqu'à ce que l'excès de chaleur qui lui avait été communiqué s'étant dissipé dans le milieu environnant, ces températures aient été toutes réduites à la température même du milieu. On nommera

Ω l'aire de la section transversale de la barre;

γ le périmètre de cette section;

x la distance d'une section quelconque à l'une des extrémités;

v la température qui a lieu dans cette section à la fin du temps t;

a la longueur de la barre;

K, h les conducibilités intérieure et extérieure;

C la chaleur spécifique;

D le poids de l'unité de volume.

La chaleur passe des parties les plus échauffées de la barre dans celles qui le sont le moins, en même temps qu'elle se dissipe, soit dans l'air environnant en traversant la surface de la barre, soit en s'écoulant par les deux extrémités maintenues à la température zéro. Si l'on considère l'élément du prisme dont la longueur

est dx, et dont le volume est Ωdx, on reconnaît que la température de cet élément s'élevant de $\frac{dv}{dt}dt$ dans le temps dt, l'excès de la chaleur qu'il reçoit sur celle qu'il perd dans le même temps, doit être $CD.\Omega dx\frac{dv}{dt}dt$. Or, la chaleur qu'il reçoit dans le temps dt par sa première extrémité est $-K.\Omega\frac{dv}{dt}dt$; celle qu'il transmet par l'extrémité opposée est $-K.\Omega\left(\frac{dv}{dt}+\frac{d^2v}{dx^2}dx\right)dt$; et celle qu'il perd au travers de sa surface est $h.\gamma dx.vdt$: d'où il suit que la chaleur qui reste dans l'élément est $\left(K.\Omega\frac{d^2v}{dx^2}-h\gamma.v\right)dxdt$. Egalant cette quantité de chaleur à celle qui est nécessaire pour produire l'élévation de température qui a lieu dans cet élément, il vient

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{CD}\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{h\gamma}{\Omega}v,$$

pour l'équation aux différences partielles qui exprime la loi du mouvement de la chaleur dans la barre.

Cette équation devient plus simple en posant $v=ue^{-\frac{h\gamma}{\Omega}t}$, u désignant une nouvelle variable : elle se réduit alors, en écrivant pour abréger k à la place de $\frac{K}{CD}$, à

$$\frac{du}{dt}=k\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Conformément à ce qu'on a vu dans le n° 487, on y satisfera par la valeur particulière $u=e^{mx+nt}$, pourvu que

les constantes m et n vérifient l'équation $n=km^2$. Ainsi l'intégrale générale est

$$u=\mathrm{A}e^{mx+km^2t}+\mathrm{A}_1e^{m_1x+km_1^2t}+\mathrm{A}_2e^{m_2x+km_2^2t}+\text{etc.},$$

dans laquelle les constantes m,m_1,m_2, etc., et $\mathrm{A},\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2$, etc., sont entièrement indéterminées.

490. Cette intégrale, aussi bien que l'équation différentielle, appartient à toutes les questions où il s'agit du mouvement de la chaleur dans une barre prismatique dont les dimensions transversales sont très-petites, placée dans un milieu dont la température est constante. Elle doit satisfaire dans la question dont il s'agit ici aux deux conditions suivantes : 1° que la valeur de v, et par conséquent celle de u, soient toujours nulles aux points extrêmes de la barre, c'est-à-dire pour les valeurs $x=0, x=a$; 2° qu'en supposant $t=0$ l'expression de v s'accorde avec l'état initial des températures, que l'on doit supposer donné sous cette forme $v=\varphi(x)$, φ désignant une fonction entièrement arbitraire.

L'expression précédente ne satisfera pas à la condition de donner $u=0$ pour les valeurs $x=0$ et $x=a$, en prenant pour les nombres m, m_1, m_2, etc., des valeurs réelles. Mais en leur attribuant des valeurs imaginaires $m\sqrt{-1}$, $m_1\sqrt{-1}$, $m_2\sqrt{-1}$, etc., et remplaçant chaque exponentielle imaginaire par sa valeur en sinus et cosinus d'arcs réels, on aura, au lieu de cette expression, la formule

$$u=(\mathrm{A}\sin.mx+\mathrm{B}\cos.mx)e^{-km^2t}+(\mathrm{A}_1\sin.m_1x+\mathrm{B}_1\cos.m_1x)e^{-km_1^2t}$$
$$+(\mathrm{A}_2\sin.m_2x+\mathrm{B}_2\cos.m_2x)e^{-km_2^2t}+\text{etc.};$$

dans laquelle on doit, pour lui conserver toute la géné-

ralité qu'elle comporte, donner des coefficients aux termes $\sin.mx.e^{-km^2t}$, $\cos.mx.e^{-km^2t}$, et ainsi des autres, parce que ces termes vérifient séparément, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, l'équation différentielle $\frac{du}{dt}=k\frac{d^2u}{dx^2}$. Mais dans le cas particulier dont il s'agit, nous devons nécessairement supposer nuls tous les coefficients B, B_1, B_2, etc., puisque les termes qu'ils affectent ne peuvent se réduire à zéro lorsque l'on suppose $x=0$; et nous devons prendre simplement la partie de l'intégrale qui s'accorde avec cette condition ; savoir :

$$u=A\sin.mx.e^{-km^2t}+A_1\sin m_1x.e^{-km_1^2t}+A_2\sin.m_2x.e^{-km_2^2t}+\text{etc.}$$

Pour satisfaire ensuite à cette autre condition que $u=0$ lorsque $x=a$, il suffira de choisir, pour les nombres m, m_1, m_2, etc., des multiples exacts de la demi-circonférence divisée par a. Nous écrirons donc

$$u=A_1\sin.\frac{\pi x}{a}.e^{-\frac{k\pi^2}{a^2}t}+A_2\sin.\frac{2\pi x}{a}.e^{-\frac{k.2^2\pi^2}{a^2}t}+A_3\sin.\frac{3\pi x}{a}.e^{-\frac{k.3^2\pi^2}{a^2}t}+\text{etc.};$$

et en concevant cette série prolongée à l'infini, le résultat présentera toute la généralité possible, avec les conditions que l'expression de u satisfasse à l'équation différentielle et donne $u=0$ lorsque $x=0$ et $x=a$.

491. Il reste à satisfaire à la condition qu'en faisant $t=0$, ce qui donne $v=u$, et

$$u=A_1\sin.\frac{\pi x}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x}{a}+A_4\sin.\frac{4\pi x}{a}+\text{etc.},$$

la série du second membre, prolongée à l'infini, reproduise la valeur de la fonction donnée et arbitraire $\varphi(x)$,

par laquelle on suppose l'état initial des températures représenté ; c'est-à-dire que les coefficients A_1, A_2, A_3, etc., qui restent encore arbitraires, doivent être déterminés par la condition que l'équation

$$\varphi(x)=A_1 \sin.\frac{\pi x}{a}+A_2 \sin.\frac{2\pi x}{a}+A_3 \sin.\frac{3\pi x}{a}+A_4 \sin.\frac{4\pi x}{a}+\text{etc.}\ldots, \quad (A)$$

subsiste pour une valeur quelconque de la variable x comprise entre $x=0$ et $x=a$.

Concevons que l'on ait partagé la longueur a de la barre en un nombre $n-1$ de parties, n étant un nombre entier très-grand, et qui tend à devenir infini, et désignons par $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ les abscisses des points de division. On posera les équations

$$\varphi(x_1)=A_1 \sin.\frac{\pi x_1}{a}+A_2 \sin.\frac{2\pi x_1}{a}+A_3 \sin.\frac{3\pi x_1}{a}+\ldots\ldots+A_n \sin.\frac{n\pi x_1}{a},$$

$$\varphi(x_2)=A_1 \sin.\frac{\pi x_2}{a}+A_2 \sin.\frac{2\pi x_2}{a}+A_3 \sin.\frac{3\pi x_2}{a}+\ldots\ldots+A_n \sin.\frac{n\pi x_2}{a},$$

$$\varphi(x_3)=A_1 \sin.\frac{\pi x_3}{a}+A_2 \sin.\frac{2\pi x_3}{a}+A_3 \sin.\frac{3\pi x_3}{a}+\ldots\ldots+A_n \sin.\frac{n\pi x_3}{a},$$

. . . .

. . . .

$$\varphi(x_n)=A_1 \sin.\frac{\pi x_n}{a}+A_2 \sin.\frac{2\pi x_n}{a}+A_3 \sin.\frac{3\pi x_n}{a}+\ldots\ldots+A_n \sin.\frac{n\pi x_n}{a},$$

qui doivent toutes subsister, et d'où l'on peut déduire les valeurs des coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$. Pour opérer l'élimination qui donnera la valeur du coefficient A_i appartenant au terme $A_i \sin.\frac{i\pi x}{a}$, on multipliera la première des équations précédentes par $\frac{a}{n+1} \sin.\frac{i\pi x_1}{a}$,

la seconde par $\frac{a}{n+1}$ sin. $\frac{i\pi x_2}{a}$, la troisième par $\frac{a}{n+1}$sin. $\frac{i\pi x_3}{a}$, etc., enfin la dernière par $\frac{a}{n+1}$ sin. $\frac{i\pi x_n}{a}$. On ajoutera ensuite toutes ces équations. Or, il est visible que le nombre n étant supposé infiniment grand, l'intervalle $\frac{a}{n+1}$ devient l'élément infiniment petit dx; et

1° la somme des premiers membres ne diffère point de l'intégrale définie $\int_0^\infty dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}\varphi(x)$.

2° Si l'on désigne par $A_j \sin\frac{j\pi x}{a}$ un terme quelconque du second membre de l'équation (A), la somme des termes correspondants dans les équations précédentes ne diffère point de $A_j \int_0^\infty dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}\sin.\frac{j\pi x}{a}$.

3° Enfin la somme des termes contenant le coefficient A_i est $A_i \int_0^\infty dx.\sin^2.\frac{i\pi x}{a}$.

Remarquons maintenant que l'intégrale définie

$$\int_0^\infty dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}.\sin.\frac{j\pi x}{a},$$

est nulle tant que les nombres i et j sont des nombres entiers différents l'un de l'autre, puisque cette intégrale revient à

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty dx\left[\cos.\frac{(i-j)\pi x}{a}-\cos.\frac{(i+j)\pi x}{a}\right].$$

Mais si les nombres i et j sont égaux, ou s'il s'agit de l'intégrale

$$\int_0^\infty dx.\sin.^2\frac{i\pi x}{a},$$

on trouve pour sa valeur $\frac{a}{2}$. Ainsi l'opération précédente a fait disparaître tous les termes, hors un seul, et il reste pour déterminer le coefficient cherché, l'équation

$$\int_0^\infty dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}.\varphi(x)=A_i\frac{a}{2};$$

d'où l'on déduit

$$A_i=\frac{2}{a}\int_0^\infty dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}.\varphi(x),$$

pour l'expression d'un coefficient quelconque dans le second membre de l'équation (A). Chacun de ces coefficients est donné par une intégrale définie sous le signe de laquelle entre la fonction arbitraire $\varphi(x)$. Cette intégrale représente l'aire d'une courbe que l'on forme en multipliant, dans l'intervalle compris entre $x=0$ et $x=a$, les ordonnées correspondantes des deux courbes qui seraient représentées par les équations $y=\varphi(x)$ et $y=\sin.\frac{i\pi x}{a}$: elle peut toujours être calculée, pourvu que l'ordonnée n'ait pas de valeurs infinies dans cet intervalle, circonstance qui n'a jamais lieu dans les questions physiques auxquelles s'applique cette analyse.

L'équation (A) devient donc (en mettant sous le signe des intégrales définies une autre variable α à la place de x),

$$\varphi(x)=\frac{2}{a}\left[\sin.\frac{\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha)+\sin.\frac{2\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{2\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha)\right.$$
$$\left.+\sin.\frac{3\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{3\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha)+\text{etc.}\right].$$

que l'on peut écrire, pour abréger

$$\varphi(x) = \frac{2}{a} \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \sin. \frac{i\pi x}{a} \int_0^a d\alpha \sin. \frac{i\pi\alpha}{a} . \varphi(\alpha),$$

i désignant un nombre entier quelconque. On prouve d'ailleurs qu'une telle série est nécessairement convergente, quelle que soit la fonction arbitraire $\varphi(x)$, c'est-à-dire que la somme des termes, à mesure que l'on en prend un plus grand nombre, approche toujours d'une limite déterminée, qui est la valeur du premier membre, pourvu que l'on ne donne à la variable x que des valeurs comprises entre o et a*. Au delà de cet intervalle le second membre de l'équation affecte des valeurs périodiques, qui ne s'accordent plus en général avec celles que pourrait donner la fonction arbitraire $\varphi(x)$.

Il ne sera pas inutile de remarquer qu'il ne peut être permis d'omettre dans le second membre de l'équation (A), un seul des termes appartenant à la série des sinus des arcs égaux à la demi-circonférence multipliée par un nombre entier quelconque; car cette omission ôterait à l'intégrale cherchée la généralité nécessaire, l'intégrale devant toujours comprendre, sans aucune exception, toutes les expressions analytiques qui satisfont à l'équation différentielle et aux conditions particulières de la question. C'est ce qui devient manifeste en remarquant que si l'on omettait, par exemple, le terme $A_3 \sin. \frac{3\pi x}{a}$, on trouverait alors en multipliant les deux membres de l'équation (A) par $dx.\sin. \frac{3\pi x}{a}$, et intégrant ensuite depuis

* Voyez la note à la fin de l'article.

$x=0$ jusqu'à $x=a$, le résultat $\int_0^a dx.\sin.\frac{3\pi x}{a}.\varphi(x)=0$, résultat qui ne peut évidemment subsister en général, mais seulement pour certaines formes particulières de la fonction $\varphi(x)$.

492. D'après ce qui précède, la température variable v des différents points de la barre se trouvera donc exprimée par la formule

$$v=\frac{2}{a}.e^{-\frac{h\gamma}{\Omega}t}.\sum_{i=1}^{i=\infty}\sin.\frac{i\pi x}{a}.e^{-\frac{K}{CD}\frac{i^2\pi^2}{a^2}t}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{i\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha),$$

qui résout entièrement la question proposée. Elle indique la manière dont la chaleur se propage et se répartit dans la barre. Les termes successifs de la série sont affectés des facteurs $e^{-\frac{K}{CD}\frac{\pi^2}{a^2}t}$, $e^{-\frac{K}{CD}\frac{2^2\pi^2}{a^2}t}$, $e^{-\frac{K}{CD}\frac{3^2\pi^2}{a^2}}$, etc., qui se réduisent tous à l'unité quand $t=0$, mais qui, lorsque t augmente, prennent des valeurs très-inégales, décroissant d'autant plus rapidement à partir du premier terme que le temps t est plus grand. Il en résulte qu'à mesure que le temps s'écoule, les derniers termes de la série disparaissent successivement, et que bientôt elle peut être réduite à ses deux premiers termes, ou même à son premier terme seul; en sorte que l'on a simplement

$$v=\frac{2}{a}.e^{-\left(\frac{h\gamma}{\Omega}+\frac{K}{CD}\frac{\pi^2}{a^2}\right)t}.\sin.\frac{\pi x}{a}\int_0^a d\alpha.\sin.\frac{\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha).$$

Ainsi quelque arbitraire et irrégulier que puisse être l'état initial de la température, elle tend rapidement à se rapprocher de la distribution indiquée par cette expression, c'est-à-dire d'un état tel que les tempéra-

tures des divers points sont proportionnels aux sinus des arcs compris dans la demi-circonférence. Ces rapports une fois établis ne s'altèrent pas. Les températures de tous les points s'abaissent à la fois en conservant les mêmes proportions, et ce n'est à la rigueur qu'après un temps infini que tout l'excès de la chaleur qui avait été donné à la barre étant dissipé, chacun des points est amené à la température zéro du milieu dans laquelle elle est placée.

493. On reconnaît d'ailleurs que la solution précédente, par cela seule qu'elle représente l'état initial et satisfait à l'équation différentielle, est la seule qui puisse être obtenue, et que toute autre solution ne pourrait en différer. En effet, lorsque le premier état $v_0=\varphi(x)$ des températures est donné, l'équation différentielle faisant connaître la valeur du coefficient $\frac{dv}{dt}$, détermine la température $v_0+\frac{dv_0}{dt}\Delta t=v_1$ qui a lieu après le temps Δt pour un point quelconque, avec une exactitude d'autant plus grande que Δt est plus petit. Elle déterminera également les températures $v_2=v_1+\frac{dv_1}{dt}\Delta t$, $v_3=v_2+\frac{dv_2}{dt}\Delta t$, etc., qui auront lieu après les temps $2\Delta t$, $3\Delta t$, etc., Or, l'expression précédente donnant $v=v_0$ lorsque $t=0$, et satisfaisant à l'équation différentielle donnera évidemment en y supposant $t=\Delta t,=2\Delta t,=3\Delta t$, etc., les mêmes valeurs v_1, v_2, v_3, etc. (l'intervalle Δt étant supposé, comme on doit le faire, infiniment petit). Ainsi la solution est unique, et nécessairement exprimée par la formule précédente.

494. Nous considérerons maintenant la question du mouvement de vibration d'une corde tendue entre deux points fixes. On suppose que cette corde ait été dérangée d'une manière quelconque de sa figure naturelle rectiligne, et que l'on ait imprimé des vitesses quelconques à tous ses points : il s'agit de déterminer les mouvements qu'ils affecteront. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que ces mouvements s'opèrent dans un plan, et de plus, que les écarts de chaque point à partir de la ligne droite tracée d'une extrémité fixe à l'autre, sont très-petits, en sorte que l'on peut négliger les puissances supérieures des nombres qui les représentent. On désignera par

x l'abscisse d'un point quelconque de la courbe affectée par la corde, à la fin du temps t ;

y l'ordonnée du même point ;

a la longueur de la corde entre ses deux extrémités fixes ;

p le poids de la corde pour l'unité de longueur ;

P un poids égal à la force avec laquelle la corde a été tendue ;

g la vitesse imprimée aux corps pesants par la gravité dans l'unité de temps.

Le mouvement de chaque élément de la longueur de la corde, dont le poids peut être exprimé par pdx, et la masse par $\frac{p}{g}dx$, peut être déterminé en considérant cet élément comme un point matériel libre, pourvu que l'on ait égard aux forces qui le sollicitent par l'effet de sa liaison avec les autres parties de la corde. Or, si l'on

veut déterminer le mouvement de l'élément dans le sens des y, on considérera qu'à la fin du temps t, cet élément est sollicité à sa première extrémité, en vertu de cette liaison, parallèlement aux y, par la composante $\mathrm{P}\frac{dy}{dx}$ de la tension P de la corde, qui tend à le rapprocher de l'axe des x; et à sa seconde extrémité par cette même composante augmentée de sa différentielle, savoir,

$$\mathrm{P}\left(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx}\right),$$

qui tend à l'éloigner du même axe. Donc l'élément est sollicité dans le sens de l'ordonnée y par la différence de ces deux forces, qui est $\mathrm{P}\frac{d^2y}{dx}$, et par conséquent la loi de son mouvement est exprimée par l'équation

$$\frac{pdx}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{P}\frac{d^2y}{dx}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{g\mathrm{P}}{p}\frac{d^2y}{dx^2},$$

qui doit subsister pour tous les points de la corde.

495. En cherchant, conformément au n° 487, à satisfaire à cette équation par la valeur particulière $y=te^{mx+nt}$, on reconnaît que les quantités m et n sont assujetties à la condition

$$n^2=k^2m^2, \qquad \text{d'où} \qquad n=\pm km,$$

en écrivant pour abréger k au lieu de $\sqrt{\frac{g\mathrm{P}}{p}}$. On peut donc prendre $y=e^{m(x+kt)}$ et $y=e^{m(x-kt)}$, la valeur de m demeurant arbitraire. D'où l'on conclut que l'intégrale générale de l'équation précédente est exprimée par

$$y=\mathrm{A}e^{m(x+kt)}+\mathrm{A}_1e^{m_1(x+kt)}+\mathrm{A}_2e^{m_2(x+kt)}+\text{etc.}$$
$$+\mathrm{B}e^{m(x-kt)}+\mathrm{B}_1e^{m_1(x-kt)}+\mathrm{B}_2e^{m_2(x-kt)}+\text{etc.},$$

les constantes m, m_1, m_2, etc., n, n_1, n_2, etc. étant entièrement arbitraires, aussi bien que A, A_1, A_2, etc.; B, B_1, B_2, etc.

Afin que ces constantes soient déterminées maintenant d'une manière conforme aux conditions de la question proposée, il faut en premier lieu que la valeur de y soit nulle aux deux extrémités fixes de la corde, c'est-à-dire lorsque $x=0$ et $x=a$, ce qui exige que l'on attribue des valeurs imaginaires aux constantes m, m_1, m_2, etc., et n, n_1, n_2, etc., ou que l'on remplace $e^{m(x+kt)}$ par

$$\cos.m(x+kt)+\sqrt{-1}\sin.m(x+kt)=\cos.mx.\cos.mkt-\sin.mx.\sin.mkt$$
$$+\sqrt{-1}(\sin.mx\cos.mkt+\cos.mx\sin.mkt),$$

et de même $e^{n(x-kt)}$ par

$$\cos.nx.\cos.nkt+\sin.nx.\sin.nkt+\sqrt{-1}(\sin.nx\cos.nkt-\cos.nx\sin nkt),$$

et ainsi des autres termes. De plus, il faudra supprimer les termes contenant $\cos.mx$ ou $\cos.nx$, puisqu'ils ne deviennent point nuls quand $x=0$; et quand aux termes contenant $\sin.\,mx$ ou $\sin.\,nx$, on devra prendre pour les constantes m ou n un nombre entier de demi-circonférences divisé par a, afin que ces termes s'évanouissent lorsque $x=a$. Nous aurons donc pour l'intégrale cherchée, en donnant des coefficients différents aux termes qui satisfont séparément à l'équation différentielle,

$$y=A_1\sin.\frac{\pi x}{a}\cos.\frac{\pi kt}{a}+A_2\sin.\frac{\pi x}{a}\cos.\frac{2\pi kt}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x}{a}\cos.\frac{3\pi kt}{a}+\text{etc.}$$
$$+B_1\sin.\frac{\pi x}{a}\sin.\frac{\pi kt}{a}+B_2\sin.\frac{2\pi x}{a}\sin.\frac{2\pi kt}{a}+B_3\sin.\frac{3\pi x}{a}\sin.\frac{3\pi kt}{a}+\text{etc.},$$

et il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients

A_1, A_2, A_3, etc., et B_1, B_2, B_3, etc., d'après la considération de l'état initial.

496. Supposons donc qu'à l'instant d'où l'on commence à compter le temps : 1° la figure de la corde soit exprimée par l'équation $y = \varphi(x)$; 2° la vitesse de l'un quelconque de ses points soit exprimée par l'équation $\frac{dy}{dt} = \psi(x)$, φ et ψ désignant des fonctions entièrement arbitraires. Pour que l'expression précédente s'accorde avec ces conditions, on devra donc avoir

$$\varphi(x) = A_1 \sin. \frac{\pi x}{a} + A_2 \sin. \frac{2\pi x}{a} + A_3 \sin. \frac{3\pi x}{a} + \text{etc.},$$

$$\psi(x) = B_1 \frac{\pi k}{a} \sin. \frac{\pi x}{a} + B_2 \frac{2\pi k}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} + B_3 \frac{3\pi k}{a} \sin. \frac{3\pi x}{a} + \text{etc.},$$

équations d'après lesquelles les coefficients dont il s'agit, se détermineront conformément à ce qu'on a vu dans le n° 491. L'expression complète de l'ordonnée y sera en conséquence

$$y = \left[\begin{array}{l} \frac{2}{a} \mathbf{S}_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi k}{a} . \cos. \frac{i\pi kt}{a} \int_0^a d\alpha . \sin. \frac{i\pi\alpha}{a} . \varphi(\alpha) \\ + \frac{2}{k\pi} \mathbf{S}_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} \sin. \frac{i\pi x}{a} . \sin. \frac{i\pi kt}{a} \int_0^a d\alpha . \sin. \frac{i\pi\alpha}{a} . \psi(\alpha) \end{array} \right].$$

Cette expression montre que, quel que soit l'état initial, le mouvement de la corde peut être regardé comme la réunion ou la superposition d'une infinité de mouvements simples oscillatoires, exprimés chacun par un terme des séries. Les durées des oscillations dans ces divers mouvements simples décroissent comme les nom-

bres 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc. L'état initial se reproduit alternativement d'un côté et de l'autre de la direction naturelle de la corde. La durée d'une oscillation entière est $a\sqrt{\frac{p}{gP}}$, en sorte qu'elle est proportionnelle à la longueur de la corde entre ses extrémités fixes, et réciproque à la racine quarrée du rapport du poids de l'unité de longueur de la corde au poids qui en mesure la tension. Ces résultats sont entièrement conformes à l'expérience.

Des notions analogues à celles qui ont été présentées dans le n° 493, prouveront d'ailleurs que la solution est unique, et nécessairement donnée par l'expression précédente, qui s'accorde avec l'état initial et vérifie l'équation différentielle.

NOTE.

Démonstration de la convergence des séries de sinus d'arcs multiples, exprimant la valeur d'une fonction arbitraire entre des limites données.

La convergence de ces séries, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, peut être démontrée de la manière suivante.

Soit, pour plus de simplicité $a=\pi$; le terme général deviendra

$$\sin. ix \int_0^\pi d\alpha . \sin. i\alpha . \varphi(\alpha).$$

Supposons d'abord i pair. L'intégrale $\int_0^\pi d\alpha. \sin. i\alpha. \varphi(\alpha)$ se composera d'un nombre entier de parties correspondantes à des intervalles égaux à $\frac{2\pi}{i}$ pris sur l'axe des α

entre 0 et π. Considérons les termes de la série assez éloignés du premier, et où le nombre i est assez grand, pour que, dans chacun de ces intervalles, la ligne dont $\varphi(\alpha)$ est l'ordonnée puisse être regardée comme une ligne droite, et soit $m+n\alpha$ l'ordonnée de cette ligne droite. Remarquons que

$$\int_0^{\frac{2\pi}{i}} d\alpha . \sin. i\alpha(m+n\alpha) = -n\frac{2\pi}{i^2};$$

ou en appelant α_1 et α_2 les abscisses qui répondent aux deux limites de cette intégrale, ce qui donne $n = \frac{\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1)}{\frac{2\pi}{i}}$,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha . \sin. i\alpha(m+n\alpha) = \frac{1}{i}[\varphi(\alpha_1)-\varphi(\alpha_2)].$$

D'où l'on conclut immédiatement, pour les termes dont il s'agit,

$$\int_0^{\pi} d\alpha . \sin. i\alpha . \varphi(\alpha) = \frac{1}{i}[\varphi(0)-\varphi(\pi)].$$

Supposons ensuite i impair. L'intégrale cherchée se composera d'abord d'un nombre entier de parties correspondantes à des intervalles égaux à $\frac{2\pi}{i}$, dont la somme totale sera, d'après ce qui précède, $\frac{1}{i}\left[\varphi(0)-\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{i}\right)\right]$; puis d'une dernière partie correspondante à un intervalle égal à $\frac{\pi}{i}$. Or, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{i}} d\alpha . \sin. i\alpha(m+n\alpha) = \frac{2m}{i} + \frac{n\pi}{i^2},$$

et pour cette dernière partie,

$$m = \varphi\left(\pi - \frac{\pi}{i}\right), \quad n = \frac{\varphi(\pi) - \varphi\left(\pi - \frac{\pi}{i}\right)}{\frac{\pi}{i}};$$

d'où résulte

$$\int_{\pi-\frac{\pi}{i}}^{\pi} d\alpha . \sin . i\alpha(m+n\alpha) = \frac{1}{i}\left[\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{i}\right) + \varphi(\pi)\right].$$

Donc lorsque i est impair et extrêmement grand, on a sensiblement

$$\int_0^{\pi} d\alpha . \sin . i\alpha . \varphi(\alpha) = \frac{1}{i}\left[\varphi(0) + \varphi(\pi)\right].$$

On conclut de ce qui précède : 1° que si la ligne dont $\varphi(x)$ est l'ordonnée se réduit à une ligne droite, on a exactement

$$\varphi(0) + \frac{\varphi(\pi) - \varphi(0)}{\pi} x =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\begin{array}{l}[\varphi(0)+\varphi(\pi)]\left(\sin . x + \frac{1}{3}\sin . 3x + \frac{1}{5}\sin . 5x + \frac{1}{7}\sin . 7x + \text{etc.}\right) \\ +[\varphi(0)-\varphi(\pi)]\left(\frac{1}{2}\sin . 2x + \frac{1}{4}\sin . 4x + \frac{1}{6}\sin . 6x + \frac{1}{8}\sin . 8x + \text{etc.}\right)\end{array}\right];$$

2° que, quelle que soit cette ligne, le résultat obtenu tendra toujours à coïncider de plus en plus avec l'expression précédente à mesure que l'on considérera des termes de la série plus éloignés du premier. D'où il résulte qu'il suffira de vérifier cette équation pour que la convergence des séries soit démontrée dans tous les cas possibles.

Considérons en premier lieu la série

$$U = \sin . x + \frac{1}{3}\sin . 3x + \frac{1}{5}\sin . 5x + \frac{1}{7}\sin . 7x + \text{etc.},$$

ne prenons d'abord que la somme d'un nombre déterminé de termes, et écrivons

$$U_n = \sin.x + \frac{1}{3}\sin.3x + \frac{1}{5}\sin.5x + \frac{1}{7}\sin.7x + \ldots + \frac{1}{n}\sin.nx,$$

n désignant un nombre impair. Différentiant par rapport à x, il viendra

$$\frac{dU_n}{dx} = \cos.x + \cos.3x + \cos.5x + \cos.7x + \ldots + \cos.nx;$$

ou, d'après une formule qui sera donnée plus loin,

$$\frac{dU_n}{dx} = \frac{\sin.(n+1)x}{2\sin.x}.$$

On trouvera donc, en multipliant par dx et intégrant,

$$U_n = const. - \frac{\cos.(n+1)x}{2(n+1)\sin.x} + \frac{1}{2(n+1)}\int \cos.(n+1)x.d\left(\frac{1}{\sin.x}\right).$$

Pour déterminer la constante, on supposera en même temps $x = \frac{\pi}{2}$ et n infiniment grand. Le premier membre deviendra $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}, = \frac{\pi}{4}$ d'où l'on conclut

$$\frac{\pi}{4} = const., \quad \text{et par conséquent} \quad U = \frac{\pi}{4}.$$

Considérons ensuite la série

$$V = \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{4}\sin.4x + \frac{1}{6}\sin.6x + \frac{1}{8}\sin.8x + \text{etc.},$$

et écrivons également

$$V_n = \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{4}\sin.4x + \frac{1}{6}\sin.6x + \frac{1}{8}\sin.8x + \ldots + \frac{1}{n}\sin.nx,$$

n désignant un nombre pair. La différentiation donnera

$$\frac{dV_n}{dx} = \cos.2x + \cos.4x + \cos.6x + \cos.8x + \ldots + \cos.nx,$$

ou, d'après la formule citée

$$\frac{dV_n}{dx} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin.(n+1)x}{2\sin.x};$$

et en intégrant

$$V_n = const. - \frac{x}{2} - \frac{\cos.(n+1)x}{2(n+1)\sin.x} + \frac{1}{2(n+1)}\int \cos(n+1)x.d\left(\frac{1}{\sin.x}\right).$$

On déterminera la constante en faisant $x = \frac{\pi}{4}$ et n infini. Le premier membre deviendra $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}\right) = \frac{\pi}{8}$. Donc

$$\frac{\pi}{8} = const. - \frac{\pi}{8}, \quad \text{d'où} \quad const. = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad V = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}.$$

Nous parvenons donc aux deux expressions

$$\frac{\pi}{4} = \sin.x + \frac{1}{3}\sin.3x + \frac{1}{5}\sin.5x + \frac{1}{7}\sin.7x + \text{etc.},$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{4}\sin.4x + \frac{1}{6}\sin.6x + \frac{1}{8}\sin.8x + \text{etc.},$$

au moyen desquelles l'équation obtenue ci-dessus devient effectivement identique.

XXXIX. MÉTHODE DES VARIATIONS.

497. La méthode des variations a pris naissance dans les questions de maximis et minimis considérés sous le point de vue le plus étendu ; mais son utilité principale

consiste dans les applications à la mécanique. Nous ne pouvons présenter ici que les premiers éléments de cette méthode et ses usages les plus simples.

Il faut distinguer en premier lieu en quoi les questions de maximis ou minimis qui dépendent du calcul des variations diffèrent des questions ordinaires du même genre. Dans les questions ordinaires, une quantité U est donnée en fonction d'une ou de plusieurs variables indépendantes x,y,z, etc., de manière que pour chaque système de valeurs attribuées à ces variables, il en résulte une valeur déterminée pour U. On demande de fixer les valeurs de x,y,z, etc., qui rendront U la plus grande ou la plus petite qu'il soit possible. Cette question, comme on l'a vu dans l'article XIV, se résout en posant les équations

$$\frac{dU}{dx}=0, \quad \frac{dU}{dy}=0, \quad \frac{dU}{dz}=0, \quad \text{etc.},$$

auxquelles doivent satisfaire les valeurs demandées des variables x,y,z, etc. Quant à la distinction des cas où les valeurs qui satisfont à ces équations répondent effectivement à un maximum ou à un minimum, elle est fondée, comme on l'a vu également dans l'article cité, sur la considération des coefficients différentiels du second ordre de la fonction U.

Dans les questions qui dépendent du calcul des variations, on conçoit entre diverses quantités variables une relation existante, mais indéterminée, et l'on demande de déterminer cette relation de manière que la valeur d'une certaine fonction, valeur qui dépend de la relation dont il s'agit, soit la plus grande possible.

Par exemple une courbe étant tracée entre deux points

fixes, la grandeur de l'air comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, et les ordonnées des points extrêmes, est déterminée, et sa valeur résulte de la relation $y=f(x)$ qui est l'équation de la courbe. Représentons-nous entre les deux points fixes plusieurs courbes qui auraient toutes des longueurs égales : l'équation $x=f(x)$ sera différente pour chacune, et l'aire, représentée par $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.y$, aura également des valeurs différentes. La longueur de la courbe est exprimée d'ailleurs par

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

On peut demander, cette longueur demeurant la même, de déterminer la figure de la courbe, c'est-à-dire la forme de la fonction $f(x)$, de manière que l'aire $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.y$ soit la plus grande ou la moindre possible.

Concevons encore une courbe tracée entre deux points fixes, et considérons un corps qui descend le long de cette courbe en cédant librement à l'action de la gravité. Le temps que ce corps emploiera à parvenir d'un point à l'autre dépend de la figure de la courbe dont il s'agit, et sa valeur est exprimée, en supposant l'axe des x vertical, par

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{2g(x-x_0)}}.$$

On peut demander de déterminer la relation $y=f(x)$ qui donne la figure de la courbe de manière que ce temps soit le moindre possible. Cette question sera plus éten-

due si l'on admet que la *courbe de la plus vite descente*, ou *brachystochrône*, doit être tracée, non pas entre deux points fixes, mais entre deux lignes courbes données, ou entre deux surfaces courbes données. Les limites x_0 et x_ω de l'intégrale deviennent alors variables, aussi bien que l'abscisse x_0 du premier point de la courbe qui se trouve sous le signe d'intégration définie.

Une recherche de même genre est celle de la ligne la plus courte qui puisse être tracée sur une surface donnée, entre deux points fixes, ou entre deux lignes marquées sur cette surface.

498. Ces exemples suffisent pour indiquer quelle est la nature des questions dont il s'agit, et à quelle recherches analytiques on se trouve conduit pour en trouver la solution. L'expression de la quantité qu'il faut rendre un maximum ou un minimum se forme, d'après les règles connues, au moyen des éléments différentiels de la courbe cherchée. Cette expression est toujours une intégrale définie prise entre des limites données, fixes ou variables avec certaines conditions. On doit rendre la valeur de cette intégrale la plus grande ou la moindre possible, en déterminant en conséquence la relation analytique dont dépendent les coefficients différentiels qui se trouvent sous le signe d'intégration. Cette question se résout d'ailleurs au moyen des principes qui s'appliquent aux questions ordinaires de maxima et minima. On suppose que toutes les quantités variables dont dépend la valeur de la fonction proposée augmentent de quantités arbitraires qui peuvent être supposées aussi petites qu'on le veut; et dans le développement de la

valeur qui en résulte pour cette fonction, on égale à zéro le terme qui contient les premières puissances de ces accroissements ; ou, si l'on veut, on égale à zéro la différentielle totale de la fonction proposée prise par rapport à toutes les quantités variables qu'elle contient. L'équation qui en résulte doit subsister pour toutes les valeurs qui peuvent être attribuées aux accroissements infiniment petits de ces quantités variables. Elle exprime la condition nécessaire du maximum ou minimum. Quant à la distinction des cas où il y a maximum ou minimum, et de ceux où, bien que cette condition soit satisfaite, le maximum ou minimum n'existe pas, elle dépend de la considération du terme qui contient les secondes puissances des accroissements. Le maximum et le minimum ont lieu respectivement lorsque ce terme est toujours négatif ou positif, quelles que soient les valeurs des accroissements.

499. Nous considérerons en premier lieu, le cas où l'on n'a qu'une variable indépendante x, et une fonction y dont la valeur dépend de celle de x, y représentera donc l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse. Il s'agit de déterminer la figure de la courbe de manière que l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_n} dx . V$$

soit un maximum ou un minimum. Les limites x_0 et x_n de l'intégrale peuvent avoir une valeur constante donnée. Ces limites peuvent aussi, dans quelques cas, varier d'après certaines conditions. V est une fonction quelconque d'un nombre déterminé des quantités

$x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc. x étant la variable indépendante, l'élément dx est supposé constant.

Cela posé, nous admettrons d'abord que les limites x_0, x_ω ont une valeur constante. Dans ce cas, les points extrêmes de la portion de courbe que l'on considère doivent se trouver toujours sur les perpendiculaires à l'axe des abscisses, menées aux distances x_0, x_ω de l'origine; et l'on fera varier d'une manière aussi générale qu'il soit possible la fonction proposée $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\, V$, si l'on suppose que la courbe cherchée se change dans une courbe quelconque infiniment voisine qui soit assujettie à cette condition. Or, il n'est pas nécessaire, pour opérer un tel changement, de faire varier x dans la fonction V; il suffit d'attribuer dans cette fonction aux quantités $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., des variations quelconques indépendantes les unes des autres, que nous désignerons par $\delta y, \delta \frac{dy}{dx}, \delta \frac{d^2y}{dx^2}, \delta \frac{d^3y}{dx^3}$, etc. La caractéristique δ représente, aussi bien que la caractéristique d, un accroissement infiniment petit attribué à la quantité variable affectée de cette caractéristique; mais il y a ici cette différence que le signe d indique un accroissement résultant du passage d'un point de la courbe cherchée au point suivant de la même courbe, tandis que le signe δ indique un accroissement résultant de ce qu'on passe d'un point de la courbe cherchée au point correspondant de la courbe quelconque infiniment voisine. De plus nous appellerons *variations* les accroissements désignés par δ, le nom de *différentielles* étant conservé

aux accroissements indiqués par d. La variation de la fonction V résultant des variations attribuées aux quantités y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., qui y sont contenues, sera exprimée par δV; et l'on aura

$$\delta V = N\delta y + P\delta\frac{dy}{dx} + Q\delta\frac{d^2y}{dx^2} + R\delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

si l'on représente par N, P, Q, R, etc., les coefficients différentiels de la fonction V pris respectivement par rapport aux quantités variables y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc.

La condition du maximum ou minimum exige que la variation

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\,\delta V$$

de l'intégrale définie proposée soit nulle. Cette condition est donc exprimée par l'équation

$$0 = \int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(N\delta y + P\delta\frac{dy}{dx} + Q\delta\frac{d^2y}{dx^2} + R\delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.}\right).$$

500. On remarquera maintenant que dans les termes $\frac{\delta dy}{dx}$, $\frac{\delta d^2y}{dx^2}$, $\frac{\delta d^3y}{dx^3}$, etc., l'ordre des signes d et δ peut être interverti à volonté. En effet, l'ordonnée du point de la courbe cherchée étant y, l'ordonnée du point suivant de la même courbe est $y+dy$, et celle du point correspondant de la courbe voisine, est $y+\delta y$. Donc l'ordonnée du point suivant de cette dernière courbe est également $y+dy+\delta(y+dy)$, ou $y+\delta y+d(y+\delta y)$. Donc $\delta dy = d\delta y$. La même remarque peut être appliquée à la fonction

$\frac{d^2y}{dx^2}$ et aux fonctions suivantes. On a également $\frac{\delta d^2y}{dx^2} = \frac{d\delta dy}{dx^2} = \frac{d^2\delta y}{dx^2}$, et ainsi de suite. Nous pouvons donc écrire au lieu de l'équation précédente,

$$0 = \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

Or, si l'on considère à part chacun des termes du second membre, on voit qu'au moyen de l'intégration par parties ils peuvent être transformés de la manière suivante. On aura

$$\int dx \cdot P\frac{d\delta y}{dx} = const. + P\delta y - \int dx . \frac{dP}{dx}\delta y;$$

puis en donnant successivement aux quantités qui entrent dans cette équation les valeurs qui répondent aux limites x_0 et x_ω de l'intégrale,

$$0 = const. + P_0\delta y_0,$$

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx . P\frac{d\delta y}{dx} = const. + P_\omega\delta y_\omega - \int_{x_0}^{x_\omega} dx . \frac{dP}{dx}\delta y;$$

et en retranchant le premier résultat du second,

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx . P\frac{d\delta y}{dx} = \left[\begin{matrix} -P_0\delta y_0 \\ +P_\omega\delta y_\omega \end{matrix} - \int_{x_0}^{x_\omega} dx . \frac{dP}{dx}\delta y\right].$$

On trouvera de même pour le terme suivant,

$$\int dx . Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} = const. + Q\delta\frac{dy}{dx} - \int dx . \frac{dQ}{dx}\frac{\delta dy}{dx}$$

$$= const. + Q\delta\frac{dy}{dx} - \frac{dQ}{dx}\delta y + \int dx . \frac{d^2Q}{dx^2}\delta y;$$

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.Q\frac{d^2\delta y}{dx^2}=\left[\begin{array}{l}-Q_0\delta\frac{dy_0}{dx}+\frac{dQ_0}{dx}\delta y_0+\int_{x_0}^{x_\omega}dx.\frac{d^2Q}{dx^2}\delta y\\ +Q_\omega\delta\frac{dy_\omega}{dx}-\frac{dQ_\omega}{dx}\delta y_\omega\end{array}\right].$$

Le terme qui viendra à la suite donnera

$$\int dx.R\frac{d^3\delta y}{dx^3}=const.+R\delta\frac{d^2y}{dx^2}-\int dx.\frac{dR}{dx}\frac{d^2\delta y}{dx^2}$$
$$=const.+R\delta\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dR}{dx}\delta\frac{dy}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}\delta y-\int dx.\frac{d^3R}{dx^3}\delta y;$$

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_\omega}dx.R\frac{d^3\delta y}{dx^3}=$$
$$\left[\begin{array}{l}-R_0\delta\frac{d^2y_0}{dx^2}+\frac{dR_0}{dx}\delta\frac{dy_0}{dx}-\frac{d^2R_0}{dx^2}\delta y_0-\int_{x_0}^{x_\omega}dx.\frac{d^3R}{dx^3}\delta y\\ +R_\omega\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2}-\frac{dR_\omega}{dx}\delta\frac{dy_\omega}{dx}+\frac{d^2R_\omega}{dx^2}\delta y_\omega\end{array}\right];$$

Et ainsi de suite, pour les autres termes.

D'après ces transformations, l'équation précédente exprimant la condition du maximum ou du minimum se trouve changée en

$$\left[\begin{array}{l}-\left(P_0-\frac{dQ_0}{dx}-\text{etc.}\right)\delta y_0-\left(Q_0-\frac{dR_0}{dx}+\text{etc.}\right)\delta\frac{dy_0}{dx}\\ \qquad\qquad-(R_0-\text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_0}{dx^2}-\text{etc.}\\ +\left(P_\omega-\frac{dQ_\omega}{dx}-\text{etc.}\right)\delta y_\omega+\left(Q_\omega-\frac{dR_\omega}{dx}+\text{etc.}\right)\delta\frac{dy_\omega}{dx}\\ \qquad\qquad+(R_\omega-\text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2}+\text{etc.}\\ +\int_{x_0}^{x_\omega}dx\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{etc.}\right)\delta y\end{array}\right].$$
$$=0.$$

Cette équation doit subsister, pour que la condition du maximum ou du minimum de l'intégrale définie proposée soit satisfaite, quelles que soient les variations marquées par le signe δ. Les deux premières lignes contiennent les variations des quantités y_0, $\frac{dy_0}{dx}$, $\frac{d^2y_0}{dx^2}$, etc., ou y_ω, $\frac{dy_\omega}{dx}$, $\frac{d^2y_\omega}{dx^2}$, etc., qui représentent les valeurs que prennent les fonctions y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., lorsqu'on attribue à l'abscisse x les valeurs y_0 ou x_ω qui répondent aux limites de l'intégrale définie proposée. La dernière ligne contient sous le signe d'intégration la variation δy de l'une quelconque des coordonnées de la courbe, variation qui est entièrement arbitraire. Cette dernière ligne doit être égalée séparément à zéro; et il en est de même des deux autres.

501. Nous aurons donc en premier lieu *l'équation indéfinie*

$$0 = \mathrm{N} - \frac{d\mathrm{P}}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathrm{R}}{dx^3} + \text{etc.},$$

qui appartient à tous les points de la courbe, et qui doit d'abord être vérifiée par l'expression de y en x qui résoudra la question. Cette équation sera une équation différentielle entre les variables x et y, dont il s'agira de trouver l'intégrale générale.

Nous aurons ensuite, si les variations relatives à la première limite de l'intégrale sont indépendantes des variations relatives à la seconde limite, les *équations déterminées*

$$0 = -\left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \text{etc.}\right)\delta y_0 - \left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dy_0}{dx}$$
$$-(R_0 - \text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_0}{dx^2} - \text{etc.},$$
$$0 = \left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta y_\omega + \left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dy_\omega}{dx}$$
$$+(R_\omega - \text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2} + \text{etc.};$$

qui appartiennent aux deux limites de l'intégrale, et qui doivent également être satisfaites par l'expression de y en x qui résout la question, lorsqu'on donne à x les valeurs extrêmes x_0, x_ω.

Si les points extrêmes étaient donnés de position, ou si les valeurs des ordonnées y_0 et y_ω étaient constantes aussi bien que x_0 et x_ω, on aurait alors $\delta y_0 = 0, \delta y_\omega = 0$, et les premiers termes des équations dont il s'agit disparaîtraient. Il suffirait donc, pour y satisfaire, d'égaler séparément à zéro les termes suivants. De même si les valeurs de quelques-uns des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., appartenant à l'un ou à l'autre des points extrêmes, étaient donnés par la nature de la question, on aurait $\delta\frac{dy_0}{dx} = 0$, $\delta\frac{d^2y_0}{dx^2} = 0$, etc., pour l'un de ces points; ou $\delta\frac{dy_\omega}{dx} = 0$, $\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2} = 0$, etc., pour l'autre; et les termes affectés de ces variations disparaîtraient d'eux-mêmes. Quant aux termes qui ne disparaissent point ainsi d'eux-mêmes par suite des valeurs déterminées que doivent conserver l'ordonnée y ou quelques-uns de ses coefficients différentiels dans les points extrêmes de la courbe, on doit les égaler séparément à

zéro. Les équations qu'on obtient de cette manière servent en général à déterminer les constantes arbitraires introduites par l'intégration de l'équation indéfinie du n° précédent.

502. Avant d'aller plus loin, on remarquera qu'en égalant à zéro le terme qui reste affecté du signe d'intégration dans l'expression de $\int dx.\delta V$, on exprime la condition nécessaire pour que l'intégration indiquée puisse s'effectuer; ou pour que la fonction $dx.\delta V$ soit une différentielle exacte, ce qui résulterait de ce que la fonction Vdx serait elle-même une différentielle exacte. Car la supposition $Vdx = dU$ entraîne $\delta V\, dx = \delta dU = d\delta U$. D'ailleurs, mettant y', y'', y''', etc., à la place de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., l'équation de condition

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

dont il s'agit, peut s'écrire

$$0 = \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dy''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dy'''}\right) + \text{etc.}$$

Si elle est satisfaite, la fonction Vdx, dans laquelle V contient x, y, y', y'', etc., sera une différentielle exacte d'une fonction de l'ordre immédiatement inférieur.

Nous pouvons vérifier cette proposition pour les fonctions du premier ordre. L'équation de condition se réduit alors à

$$0 = \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right).$$

Comme elle doit être identique, les deux termes doivent

être du même ordre. Donc, puisque $\frac{dV}{dy}$ ne peut contenir que y', il s'ensuit que $\frac{dV}{dy'}$ ne doit pas contenir y', puisqu'autrement $\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right)$ contiendrait y''; d'où l'on conclut en premier lieu que la fonction différentielle du premier ordre dont il s'agit, qui doit être une différentielle exacte, ne peut être que de la forme

$$(A+By')dx, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad Adx+Bdy,$$

A et B étant des fonctions de x et de y seulement. Cette fonction donnera

$$\frac{dV}{dy}=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dV}{dy'}=B;$$

et en substituant dans l'équation de condition, il viendra,

$$0=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dB}{dx}+\frac{dB}{dy}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx},$$

conformément à ce qu'on a vu dans le n° 365.

503. Nous avons supposé dans le n° 499, afin de considérer d'abord le cas plus simple, que dans l'intégrale définie proposée

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.V,$$

qu'il s'agit de rendre un maximum ou un minimum, les limites x_0, x_ω étaient constantes, en sorte que dans tous les changements que l'on pouvait faire subir à la

courbe qui représente la relation de y à x, les points extrêmes devaient demeurer constamment sur les mêmes parallèles à l'axe des y. Nous supposerons maintenant ces limites variables. Dans ce cas, nous ferons varier la fonction $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.V$ de la manière la plus générale qu'il soit possible, en admettant que toutes les abscisses x augmentent de la quantité arbitraire δx, en même temps que l'ordonnée y et ses dérivées augmenteront comme ci-dessus, des quantités δy, $\delta \frac{dy}{dx}$, $\delta \frac{d^2y}{dx^2}$, etc. La courbe qui exprime la relation de y à x se changera alors en une courbe infiniment voisine. La variation qui en résultera dans l'intégrale $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.V$ sera exprimée par

$$-V_0\delta x_0 + V_\omega \delta x_\omega + \int_{x_0}^{x_\omega} dx.\delta V.$$

Mais il faut remarquer ici que, par l'effet de la variation supposée de l'abscisse x, un point quelconque de la première courbe étant transporté dans la courbe variée, son ordonnée devient $y+\delta y$. Donc, l'ordonnée qui répond à l'abscisse x dans la courbe variée, a pour expression $y+\delta y - \left(\frac{dy}{dx} + \delta \frac{dy}{dx}\right)\delta x$, ou $y+\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$, en négligeant les quantités du second ordre. On conclut de là qu'en formant δV dans l'expression précédente, nous devons regarder y comme augmentant, non pas de δy, mais de $\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$. La même

remarque s'appliquera aux fonctions dérivées de y. On doit regarder $\frac{dy}{dx}$ comme ayant varié seulement de $\delta\frac{dy}{dx} - \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\delta x$, ou $\delta\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\delta x$. On considérera également $\frac{d^2y}{dx^2}$ comme ayant varié seulement de $\delta\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3}\delta x$, et ainsi des autres. Par conséquent, si nous représentons comme dans le n° 499, par N,P, Q, etc., les coefficients différentiels partiels de la fonction V pris respectivement par rapport à y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. nous devrons écrire ici,

$$\delta V = N\left(dy - \frac{dy}{dx}\delta x\right) + P\left(\delta\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\delta x\right) + Q\left(\delta\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3}\delta x\right) + \text{etc.}$$

On remarquera de plus qu'en posant

$$dy - \frac{dy}{dx}\delta x = \delta u,$$

et différentiant cette équation, il vient

$$\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\delta x - \frac{dy}{dx}\frac{d\delta x}{dx} = \frac{d\delta u}{dx};$$

puis en ajoutant l'équation identique

$$\delta\frac{dy}{dx} = \frac{\delta dy}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{\delta dx}{dx},$$

on trouve (puisque l'ordre des signes d et δ peut être changé à volonté),

$$\delta\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\delta x = \frac{d\delta u}{dx}.$$

Différentiant de même cette dernière équation, ce qui donne

$$\frac{d\delta\frac{dy}{dx}}{dx}-\frac{d^3y}{dx^3}\delta x-\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d\delta x}{dx}=\frac{d^2\delta u}{dx^2};$$

puis ajoutant l'équation identique

$$\delta\frac{d^2y}{dx^2}=\delta\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{\delta d\frac{dy}{dx}}{dx}-\frac{d^2y}{dx}\frac{\delta dx}{dx},$$

on trouve également

$$\delta\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^3y}{dx^3}\delta x=\frac{d^2\delta u}{dx^2}.$$

On obtiendra de la même manière

$$\delta\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^4y}{dx^4}\delta x=\frac{d^3\delta u}{dx^3};$$

et ainsi de suite. Il en résulte que l'expression précédente de δV peut s'écrire

$$\delta V=N\delta u+P\frac{d\delta u}{dx}+Q\frac{d^2\delta u}{dx^2}+R\frac{d^3\delta u}{dx^3}+\text{etc.}$$

L'équation exprimant la condition du maximum ou du minimum sera donc

$$0=\left[\begin{array}{l}-V_0\delta x_0+V_\alpha\delta x_\alpha\\+\int_{x_0}^{x_\alpha}dx\left(N\delta u+P\frac{d\delta u}{dx}+Q\frac{d^2\delta u}{dx^2}+R\frac{d^3\delta u}{dx^3}+\text{etc.}\right)\end{array}\right];$$

et en opérant sur le second terme les transformations indiquées n° 500, cette équation se changera en

$$\left[\begin{array}{l} -V_0\delta x_0 - \left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \frac{d^2R_0}{dx^2} - \text{etc.}\right)\left(\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right) \\ -\left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \text{etc.}\right)\left(\delta\frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0\right) - \text{etc.} \\ +V_\omega dx_\omega + \left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \frac{d^2P_\omega}{dx^2} - \text{etc.}\right)\left(\delta y_\omega - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) \\ +\left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\left(\delta\frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega\right) + \text{etc} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left[N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}\right]\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) \end{array}\right]$$

$$= 0.$$

En comparant ce résultat à celui du n° 500, on voit en premier lieu que l'on est conduit ici à la même équation indéfinie

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.},$$

qui doit subsister pour tous les points de la courbe. Quant aux équations déterminées, elles diffèrent de celles qui sont écrites n° 501, par l'introduction des termes $-V_0\delta x_0$ et $V_\omega\delta x_\omega$; et parce que les quantités δy_0 et δy_ω sont remplacées par $\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0$ et $\delta y_\omega - \frac{dy}{dx}\delta x_\omega$; les quantités $\delta\frac{dy_0}{dx}$ et $\delta\frac{dy_\omega}{dx}$ par $\delta\frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0$ et $\delta\frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega$; et ainsi de suite. Si les variations δx_0, δy_0, $\delta\frac{dy_0}{dx}$, etc., et δx_ω, δy_ω, $\delta\frac{dy_\omega}{dx}$; etc., sont arbitraires, le coefficient de chacune de ces variations doit être égalé séparément à zéro, ce qui donnera autant d'équations distinctes auxquelles l'expression cherchée de y en x doit satisfaire quand on donne à x les va-

leurs extrêmes x_0 et x_ω. Si quelques unes des quantités $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., ont des valeurs déterminées pour l'un ou l'autre des points extrêmes de la courbe, les termes affectés des variations de ces quantités disparaissent d'eux-mêmes, et on doit égaler seulement à zéro les termes affectés des autres variations. Il faut remarquer d'ailleurs que si la position des points extrêmes est entièrement arbitraire, chacun de ces points peut être placé où l'on veut sur le plan de la courbe, sans qu'elle cesse pour cela de satisfaire à la condition de maximum ou minimum de l'intégrale définie proposée. Donc on est alors le maître de supposer $\delta x_0 = 0$ et $\delta y_0 = 0$ et, par conséquent, de ne point poser les équations exprimant l'égalité à zéro des coefficients dont ces deux variations sont affectées dans l'équation précédente ; en sorte que dans le cas dont il s'agit, l'on a deux équations de moins pour la détermination des constantes.

504. Nous devons remarquer que la fonction désignée par V dans l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.V$$

qu'il s'agit de rendre un maximum ou un minimum, pourrait contenir une ou plusieurs des quantités $x_0, y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}$, etc., ou $x_\omega, y_\omega, \frac{dy_\omega}{dx}, \frac{d^2y_\omega}{dx^2}$, etc., qui appartiennent aux points extrêmes de la courbe. On en voit un exemple dans la question de la brachystochrône citée n° 497, où la fonction sous le signe d'intégration

contient l'abscisse du premier de ces points. On doit dans ce cas, en formant la variation δV, faire varier les quantités dont il s'agit, si leurs valeurs ne sont point constantes en vertu de l'énoncé de la question.

Si, par exemple, V contenait x_0, et que la variation de V prise par rapport à cette quantité fût $\mu\delta x_0$, l'expression de δV du n° 503, devrait être augmentée du terme $\mu\delta x_0$. Donc le terme affecté du signe d'intégration dans l'équation qui exprime la condition du maximum ou minimum devrait être augmenté de la quantité $\int_{x_0}^{x_\alpha} dx.\mu\delta x_0$, ou $\delta x_0 \int_{x_0}^{x_\alpha} dx.\mu$. Il s'ensuit que l'on devrait ajouter cette quantité au second membre de celle des équations déterminées qui se rapporte à la première limite, en sorte que le terme affecté de δx_0 dans cette équation deviendrait

$$\left(-V_0 + \int_{x_0}^{x_\alpha} dx.\mu\right)\delta x_0.$$

On aurait égard de la même manière à la variation des autres fonctions dont il s'agit, si elles entraient dans la composition de la fonction V.

505. Nous avons considéré jusqu'ici le cas où l'on avait une seule variable indépendante x, et une fonction y dépendante de cette variable, comme cela a lieu dans les problèmes qui se rapportent à une courbe plane. Dans les questions relatives à une courbe à double courbure, il faut considérer une variable indépendante x, et deux fonctions y et z qui dépendent de cette variable. L'intégrale définie qu'il s'agit de rendre un maximum étant toujours

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\mathrm{V},$$

la fonction V contient alors en général, outre la variable x, les fonctions $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc. et $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}$, etc. Supposons d'abord, comme dans le n° 472, les limites x_0 et x_ω de l'intégrale constantes. La variation de cette intégrale est

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\delta\mathrm{V}.$$

Admettons qu'en différentiant la fonction V par rapport aux quantités y, z et à leurs fonctions dérivées, et marquant les différentielles par δ, l'on trouve

$$\delta\mathrm{V} = \left[\begin{array}{l} \mathrm{N}\delta y + \mathrm{P}\delta\frac{dy}{dx} + \mathrm{Q}\delta\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{R}\delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.} \\ + n\delta z + p\delta\frac{dz}{dx} + q\delta\frac{d^2z}{dx^2} + r\delta\frac{d^3z}{dx^3} + \text{etc.} \end{array}\right];$$

l'équation exprimant la condition du maximum ou minimum de l'intégrale définie proposée sera

$$0 = \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left[\begin{array}{l} \mathrm{N}\delta y + \mathrm{P}\delta\frac{dy}{dx} + \mathrm{Q}\delta\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{R}\delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.} \\ + n\delta z + p\delta\frac{dz}{dx} + q\delta\frac{d^2z}{dx^2} + r\delta\frac{d^3z}{dx^3} + \text{etc.} \end{array}\right].$$

Appliquant donc à cette équation l'analyse exposée n° 500, on verra, comme dans les n° 501 et 502 : 1° que l'on doit avoir pour tous les points de la courbe l'équation indéfinie

$$0 = \left[\begin{array}{l} \left(\mathrm{N} - \frac{d\mathrm{P}}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathrm{R}}{dx^3} + \text{etc.}\right)\delta y \\ + \left(n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{etc.}\right)\delta z \end{array}\right]$$

laquelle, si les variations δy et δz sont entièrement indépendantes l'une de l'autre, donne les deux équations distinctes

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$
$$0 = n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{etc.}$$

2° que l'on a également pour les points extrêmes de la courbe les équations déterminées suivantes, savoir : pour le premier point

$$\left[\begin{array}{l} \left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \frac{d^2R_0}{dx^2} - \text{etc.}\right)\delta y_0 + \left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dy_0}{dx} \\ \quad + (R - \text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_0}{dx^2} + \text{etc.} \\ \left(p_0 - \frac{dq_0}{dx} + \frac{d^2r_0}{dx^2} - \text{etc.}\right)\delta z_0 + \left(q_0 - \frac{dr_0}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dz_0}{dx} \\ \quad + (r_0 - \text{etc.})\,\delta\frac{d^2z_0}{dx^2} + \text{etc.} \end{array}\right] = 0;$$

et pour le second point

$$\left[\begin{array}{l} \left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta y_\omega + \left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dy_\omega}{dx} \\ \quad + (R - \text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2} + \text{etc.} \\ + \left(p_\omega - \frac{dq_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta z_\omega + \left(q_\omega - \frac{dr_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dz_\omega}{dx} \\ \quad + (r_\omega - \text{etc.})\,\delta\frac{d^2z_\omega}{dx^2} + \text{etc.} \end{array}\right] = 0.$$

On doit appliquer à ces deux équations les remarques faites n° 502, relativement aux conditions qui peuvent être données pour les extrémités de la courbe.

On doit également appliquer au cas dont il s'agit, les remarques faites n° 504, relativement à la nécessité de tenir compte dans l'expression de δV des variations des quantités relatives aux limites, lorsque ces quantités sont variables et entrent dans la composition de la fonction V.

Il est aisé d'étendre cette analyse aux cas où il y aurait un plus grand nombre de fonctions dépendantes de la variable x.

506. Nous pouvons remarquer ici, comme dans le n° 502, que les équations

$$0=N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{etc.}$$

$$0=n-\frac{dp}{dx}+\frac{d^2q}{dx}-\frac{d^3r}{dx^3}+\text{etc.},$$

que l'on peut écrire

$$0=\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dy'''}\right)+\text{etc.}$$

$$0=\frac{dV}{dz}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dz'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dz''}\right)-\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dz'''}\right)+\text{etc.},$$

en mettant y', y'', y''', etc., à la place de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., et z', z'', z''', etc., à la place de $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}$, etc., expriment les conditions nécessaires pour que la fonction Vdx soit une différentielle exacte.

Dans le cas où cette fonction serait du premier ordre, ces équations se réduisent à

$$0=\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right), \qquad 0=\frac{dz}{dV}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dz'}\right).$$

On en conclurait d'abord, comme dans le n° cité, que

la fonction dont il s'agit doit, pour être une différentielle exacte, être de la forme

$$(A+By'+Cz')dx, \quad \text{c'est-à-dire} \quad Adx+Bdy+Cdz,$$

A,B,C désignant des fonctions qui ne contiennent que x,y et z. Cette fonction donnerait donc

$$\frac{dV}{dy}=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dC}{dy}z', \qquad \frac{dV}{dz}=\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}y'+\frac{dC}{dz}z'.$$
$$\frac{dV}{dy'}=B, \qquad \frac{dV}{dz'}=C;$$

et en substituant dans les équations de condition, on trouverait

$$0=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dC}{dy}z'-\left(\frac{dB}{dx}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dB}{dz}z'\right),$$
$$0=\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}y'+\frac{dC}{dz}z'-\left(\frac{dC}{dx}+\frac{dC}{dy}y'+\frac{dC}{dz}z'\right);$$

ou

$$0=\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}-\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)z',$$
$$0=\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}+\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)y'.$$

Comme ces équations ne doivent pas déterminer y' et z' puisque y et z sont des fonctions quelconques de x, on en conclut les trois équations distinctes

$$\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}=0, \quad \frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}=0, \quad \frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}=0,$$

conformément à ce qu'on a vu dans le n° 366.

507. Si l'on admet maintenant, comme dans le n° 503, que les limites x_0 et x_α de l'intégrale définie proposée



puissent varier, il sera nécessaire de faire varier l'abscisse x. On reconnaîtra que les variations des coordonnées correspondantes à cette abscisse ne sont plus alors δy et δz, mais $\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$ et $\delta z - \frac{dz}{dx}\delta x$. Par conséquent, l'équation indéfinie qui doit subsister pour tous les points de la courbe devient

$$\left[\begin{array}{l}\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}\right)\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) \\ + \left(n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{etc.}\right)\left(\delta z - \frac{dz}{dx}\delta x\right)\end{array}\right];$$
$$=0.$$

et si les variations $\delta x, \delta y, \delta z$, sont entièrement indépendantes les unes des autres, on aura comme ci-dessus les équations distinctes

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$
$$0 = n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{etc.}$$

A l'égard des équations déterminées, on verra également que l'on est obligé d'ajouter au second membre de l'équation relative à la première limite, le terme $-V_0\delta x_0$; et de remplacer δy_0 et δz_0 par $\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0$ et $\delta z_0 - \frac{dz_0}{dx}\delta x_0$, $\delta\frac{dy_0}{dx}$ et $\delta\frac{dz_0}{dx}$ par $\delta\frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0$ et $\delta\frac{dz_0}{dx} - \frac{d^2z_0}{dx^2}\delta x_0$, et ainsi de suite. On ajoutera de même à l'équation déterminée relative à la seconde limite, le terme $V_\omega \delta_\omega$; et l'on remplacera δy_ω et δz_ω par $\delta y - \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega$ et $\delta z - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega$, $\delta\frac{dy_\omega}{dx}$ et $\delta\frac{dz_\omega}{dx}$ par $\delta\frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega$ et $\delta\frac{dz_\omega}{dx} - \frac{d^2z_\omega}{dx^2}\delta x_\omega$, et ainsi de suite.

508. Dans les équations qui se rapportent aux surfaces, par exemple dans la recherche de la surface qui, se terminant à un contour donné, aurait la plus petite aire possible, on doit considérer deux variables indépendantes x, y, et une fonction z dépendante de ces variables. Il s'agit alors d'exprimer les conditions du maximum ou minimum d'une intégrale double telle que

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy . V,$$

dans laquelle V peut contenir en général les variables indépendantes x, y, ainsi que la fonction z et de ses dérivées $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}$, etc. Nous considérerons seulement le cas où la projection sur le plan des x, y du contour auquel se termine la surface est un rectangle dont les côtés sont respectivement parallèles aux axes des x et y. Les limites x_0, x_ω désignent les abscisses extrêmes; les limites y_0 et y_ω désignent de même les ordonnées extrêmes. De plus, nous supposerons que ces limites ont des valeurs données et invariables, en sorte que le contour de la portion de surface dont il s'agit, ait toujours pour projection les côtés du rectangle. Il ne sera pas nécessaire alors de faire varier les abscisses x et y. La variation de l'intégrale définie proposée sera

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy . \delta V,$$

et si l'on suppose

$$\delta V = L\delta z + M\delta \frac{dz}{dx} + N\delta \frac{dz}{dy} + P\delta \frac{d^2z}{dx^2} + Q\delta \frac{d^2z}{dxdy} + R\delta \frac{d^2z}{dx^2} + \text{etc.}$$

on aura, pour exprimer la condition du maximum ou du minimum de cette intégrale, l'équation

$$0=\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy\Big[L\delta z+M\delta\frac{dz}{dx}+N\delta\frac{dz}{dy} +P\delta\frac{d^2z}{dx^2}+Q\delta\frac{d^2z}{dxdy}+R\delta\frac{d^2z}{dx^2}+\text{etc.}\Big].$$

509. Appliquant donc les règles du calcul des variations comme on l'a fait n° 500, c'est-à-dire faisant passer dans les termes compris sous le double signe d'intégration le d devant le δ, et intégrant par parties, on transformera ces termes de la manière suivante.

1° $\iint dxdy M\frac{d\delta z}{dx}=\int dy.M\delta z-\iint dxdy\frac{dM}{dx}\delta z+const.$;

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy.M\frac{d\delta z}{dx}=-\int_{y_0}^{y_\omega} dy(M\delta z)_{(x_0)}+\int_{y_0}^{y_\omega} dy(M\delta z)_{(x_\omega)} -\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy\frac{dM}{dx}\delta z.$$

Les signes (x_0), (x_ω) mis au bas des parenthèses, indiquent que dans les quantités contenues dans ces parenthèses, on donne à x les valeurs $x=x_0, x=x_\omega$, c'est-à-dire que ces quantités ont les valeurs qui conviennent aux limites de la surface par rapport au plan des y,z.

La même transformation donne

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy.N\frac{d\delta z}{dy}=-\int_{x_0}^{x_\omega} dx(N\delta z)_{(y_0)}+\int_{x_0}^{x_\omega} dx(N\delta z)_{(y_\omega)} -\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy\frac{dN}{dy}\delta z.$$

Les signes $(y_\circ),(y_\omega)$ indiquent que les quantités contenues dans les parenthèses ont les valeurs qui conviennent aux limites de la surface parallèles au plan des x,z.

2° $$\int\!\!\int dxdy\text{P}\,\frac{d^2\delta z}{dx^2}=\int dy\text{P}\delta\,\frac{dz}{dx}-\int dy\,\frac{d\text{P}}{dx}\,\delta z$$
$$+\int\!\!\int dxdy\,\frac{d^2\text{P}}{dx^2}\,\delta z+const.,$$

d'où

$$\int_{x_\circ}^{x_\omega}dx\int_{y_\circ}^{y_\omega}dy\text{P}\,\frac{d^2\delta z}{dx^2}=$$
$$\left[\begin{aligned}&-\int_{y_\circ}^{y_\omega}dy\left(\text{P}\delta\frac{dz}{dx}\right)_{(x_\circ)}+\int_{y_\circ}^{y_\omega}dy\left(\frac{d\text{P}}{dx}\delta z\right)_{(x_\circ)}\\&+\int_{y_\circ}^{y_\omega}dy\left(\text{P}\delta\frac{dz}{dx}\right)_{(x_\omega)}-\int_{y_\circ}^{y_\omega}dy\left(\frac{d\text{P}}{dx}\delta z\right)_{(x_\omega)}\\&+\int_{x_\circ}^{x_\omega}dx\int_{y_\circ}^{y_\omega}dy\,\frac{d^2\text{P}}{dx^2}\,\delta z\end{aligned}\right].$$

3° $$\int\!\!\int dxdy\text{Q}\,\frac{d^2\delta z}{dxdy}=\int dx.\text{Q}\,\frac{d\delta z}{dx}-\int dx\int dy\frac{d\text{Q}}{dy}\,\frac{d\delta z}{dx}+const.$$
$$=\int dx.\text{Q}\,\frac{d\delta z}{dx}-\int dy\,\frac{d\text{Q}}{dy}\,\delta z+\int\!\!\int dxdy\,\frac{d^2\text{Q}}{dxdy}\,\delta z+const.\,;$$

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \mathrm{Q} \frac{d^2\delta z}{dx dy} =$$

$$\left[\begin{array}{l} -\int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\mathrm{Q}\frac{d\delta z}{dx}\right)_{(y_0)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\delta z\right)_{(x_0)} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\mathrm{Q}\frac{d\delta z}{dx}\right)_{(y_\omega)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\delta z\right)_{(x_\omega)} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx dy}\delta z \end{array}\right].$$

Mais on a

$$\int dx \mathrm{Q} \frac{d\delta z}{dx} = \mathrm{Q} dz - \int dx \frac{d\mathrm{Q}}{dx} \delta z + const.$$

Ainsi l'expression précédente peut se changer en

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \mathrm{Q} \frac{d^2\delta z}{dx dy} =$$

$$\left[\begin{array}{l} (\mathrm{Q}\delta z)_{(x_0, y_0)} + (\mathrm{Q}\delta z)_{(x_\omega, y_0)} - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\delta z\right)_{(y_0)} \\ + \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\delta z\right)_{(x_0)} \\ -(\mathrm{Q}\delta z)_{(x_0, y_\omega)} + (\mathrm{Q}\delta z)_{(x_\omega, y_\omega)} + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\delta z\right)_{(y_\omega)} \\ - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\delta z\right)_{(x_\omega)} + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx dy}\delta z \end{array}\right].$$

Le terme suivant contenant R subira la même transformation que le terme contenant P : il suffit de changer dans ce dernier cas x en y.

En substituant ces valeurs dans l'équation qui exprime la condition du maximum ou minimum, elle deviendra

$$\left[\begin{array}{l}(Q\delta z)_{(x_0,y_0)}-(Q\delta z)_{(x_\omega,y_0)}-(Q\delta z)_{(x_0,y_\omega)}+(Q\delta z)_{(x_\omega,y_\omega)}\\ -\int_{y_0}^{y_\omega}dy\left[\left(M-\frac{dP}{dx}-\frac{dQ}{dy}+\text{etc.}\right)\delta z+(P-\text{etc.})\delta\frac{dz}{dx}+\text{etc.}\right]_{(x_0)}\\ +\int_{y_0}^{y_\omega}dy\left[\left(M-\frac{dP}{dx}-\frac{dQ}{dy}+\text{etc.}\right)\delta z+(P-\text{etc.})\delta\frac{dz}{dx}+\text{etc.}\right]_{(x_\omega)}\\ -\int_{x_0}^{x_\omega}dx\left[\left(N-\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dy}+\text{etc.}\right)\delta z+(R-\text{etc.})\delta\frac{dz}{dy}+\text{etc.}\right]_{(y_0)}\\ +\int_{x_0}^{x_\omega}dx\left[\left(N-\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dy}+\text{etc.}\right)\delta z+(R-\text{etc.})\delta\frac{dz}{dy}+\text{etc.}\right]_{(y_\omega)}\\ +\int_{x_0}^{x_\omega}dx\int_{y_0}^{y_\omega}dy\left(L-\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}+\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dxdy}+\frac{d^2R}{dy^2}-\text{etc.}\right)\delta z\end{array}\right]$$

$$=0.$$

Cette équation doit subsister pour toutes les valeurs qui peuvent être attribuées aux variations des coordonnées des points intérieurs ou des points appartenant aux limites.

510. Nous aurons donc en premier lieu, l'équation indéfinie

$$0=L-\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}+\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2R}{dxdy}+\frac{d^2R}{dy^2}+\text{etc.},$$

qui doit être satisfaite pour toutes les valeurs des coordonnées comprises entre les limites.

511. Nous voyons en second lieu que l'on doit poser

$$0=(Q\delta z)_{(x_0,y_0)}-(Q\delta z)_{(x_\omega,y_0)}-(Q\delta z)_{(x_0,y_\omega)}+(Q\delta z)_{(x_\omega,y_\omega)},$$

en sorte que si les variations δz de l'ordonnée aux quatre sommets du rectangle, projection de la surface, sont arbitraires, il faudra que Q soit nulle pour les valeurs des coordonnées qui appartiennent à ces points.

De plus, nous avons l'équation

$$0=\left(M-\frac{dP}{dx}-\frac{dQ}{dy}+\text{etc.}\right)\delta x+(P-\text{etc.})\delta\frac{dz}{dx}+\text{etc.}$$

qui doit subsister pour toutes les valeurs appartenant aux points situés sur les limites de la surface, parallèles aux xz; et enfin l'équation

$$0=\left(N-\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dy}+\text{etc.}\right)\delta z+(R-\text{etc.})\delta\frac{dz}{dy}+\text{etc.}$$

qui doit subsister pour toutes les valeurs appartenant aux points situés sur les limites parallèles aux yz. Si les variations $\delta z, \delta\frac{dz}{dx}, \delta\frac{dz}{dy}$, etc., sont arbitraires, chaque terme de ces équations doit être égalé séparément à zéro.

Des cas où il existe des relations données entre les variables.

512. On a supposé généralement dans ce qui précède qu'il n'existait point de relations données d'avance entre les quantités qui entrent dans l'expression de la fonction V. Cependant la nature de la question établit le plus souvent des conditions auxquelles il est nécessaire d'avoir égard, en même temps que l'on satisfait à la condition du maximum ou minimum de l'intégrale définie proposée. L'effet des conditions dont il s'agit, est de restreindre l'étendue des valeurs qui peuvent être attribuée aux variations affectées du signe δ.

Si, par exemple, la valeur de l'intégrale définie proposée dépend de la figure d'une courbe, il peut se faire que les points extrêmes de cette courbe soient assujettis à se

trouver sur deux lignes données, ayant pour équations $y=\varphi(x), y=\psi(x)$. Les variations δx_0 et δy_0 des coordonnées du premier point, et les variations δx_ω et δy_ω des coordonnées du dernier point, devront alors avoir entre elles les rapports convenables pour qu'elles puissent satisfaire respectivement à ces équations. On aura donc ici

$$\delta y_0 = \frac{d.\varphi(x_0)}{dx}\,\delta x_0\,, \quad \text{et} \quad \delta y_\omega = \frac{d.\psi(x_\omega)}{dx}\,\delta x_\omega\,,$$

équations qui devraient subsister en même temps que les équations déterminées obtenues conformément à ce qui a été dit dans les n°s 501 et 503.

Si de plus la direction de la tangente aux extrémités de la courbe cherchée devait s'accorder aussi avec la direction de la tangente des courbes ayant pour équations $y=\varphi(x), y=\psi(x)$, on aurait encore les équations

$$\delta\,\frac{dy_0}{dx} = \frac{d^2.\varphi(x_0)}{dx^2}\,\delta x_0\,, \quad \text{et} \quad \delta\,\frac{dy_\omega}{dx} = \frac{d^2.\psi(x_\omega)}{dx^2}\,\delta x_\omega.$$

Et ainsi de suite pour les autres fonctions différentielles. Au moyen de ces *équations de condition*, on éliminerait une partie des variations qui se trouveraient dans les équations déterminées. Après cette élimination, les variations restant dans ces équations se trouvant entièrement arbitraires, on égalerait séparément à zéro chacun de leurs coefficients.

512. Il existe quelquefois des équations de condition qui doivent subsister pour toutes les valeurs des variables comprises dans les limites de l'intégrale définie proposée. Par exemple, si l'on demande de tracer sur une surface donnée, la ligne la plus courte entre deux

points pris sur cette surface, il est évident qu'en désignant son équation par

$$F(x, y, z) = 0,$$

l'ordonnée de la ligne cherchée doit toujours satisfaire à cette équation. Dans un cas semblable, les variations des quantités qui entrent dans la fonction V étant restreintes par la condition que les valeurs de ces quantités satisfassent à l'équation donnée, cette équation doit subsister quand on y remplace ces quantités par leurs valeurs augmentées de ces variations. On peut donc différentier l'équation proposée par rapport aux quantités dont il s'agit, en marquant les différentielles par δ. Ainsi

$$L = 0,$$

étant en général une équation de condition, dans laquelle L désigne une fonction quelconque des variables indépendantes, des fonctions dépendantes de ces variables et de leurs fonctions dérivées, on formera l'équation

$$\delta L = 0,$$

δ indiquant une différentiation affectée par rapport à toutes ces quantités. Cette équation servira à éliminer une des variations qui se trouveront dans l'équation indéfinie que l'on forme en égalant à zéro le terme qui reste sous le signe d'intégration dans l'équation générale exprimant la condition du maximum ou minimum.

Il en serait de même s'il existait d'autres équations de condition

$$M = 0, \qquad N = 0, \qquad \text{etc.},$$

analogues à la précédente. On formerait également les équations

$$\delta M = 0, \qquad \delta N = 0, \qquad \text{etc.},$$

que l'on réunirait à l'équation indéfinie dont on vient de parler, afin d'éliminer autant de variations qu'il serait possible. Les coefficients des variations restantes seraient ensuite égalés séparément à zéro.

514. Dans d'autres questions, le maximum ou minimum cherché ne doit avoir lieu qu'autant qu'une certaine intégrale définie conserve une valeur déterminée. C'est ce qu'on nomme maximum ou minimum *relatif*. La recherche de la courbe qui, avec un contour donné, renferme l'aire la plus grande ou la moindre possible, est de ce genre. Il s'agit donc de rendre l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, V$$

la plus grande ou la moindre possible, en même temps que l'on a l'équation

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, U = const.,$$

U étant, aussi bien que V, une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$. etc. Les conditions du problème donnent les deux équations

$$\delta\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, V = 0, \qquad \text{et} \qquad \delta\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, U = 0.$$

Or, l'expression de ces conditions ne sera pas altérée si l'on ajoute la seconde équation à la première, après l'avoir multipliée par une constante arbitraire a. On peut donc écrire

$$\delta \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mathrm{V} + a\delta \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mathrm{U} = 0, \quad \text{ou} \quad \delta \int_{x_0}^{x_\omega} dx (\mathrm{V} + a\mathrm{U}) = 0.$$

On traitera cette dernière équation d'après les règles exposées ci-dessus, comme si l'on voulait rendre un maximum ou un minimum absolu la fonction

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \; (\mathrm{V} + a\mathrm{U}).$$

En effet, la relation entre y et z qui rendra cette fonction un maximum ou un minimum absolu, satisfait évidemment à la condition de rendre $\int_{x_0}^{x_\omega} dx . \mathrm{V}$ un minimum ou maximum pour les cas où $\int_{x_0}^{x_\omega} dx . \mathrm{U}$ prend une valeur donnée ; car s'il en était autrement, il y aurait donc des valeurs de la somme des deux fonctions qui seraient plus grandes ou moindres que les valeurs données par le maximum ou minimum absolu, ce qui est impossible. La constante a se détermine de manière à donner à l'intégrale $\int_{x_0}^{x_\omega} dx . \mathrm{U}$ la valeur que l'on a fixée dans chaque cas particulier.

Exemples de l'application du calcul des variations.

515. On se proposera en premier lieu de déterminer la ligne la plus courte qui puisse être tracée entre deux lignes courbes données. Les coordonnées de la ligne cherchée étant représentées par x, y, z, il s'agit donc de rendre un minimum la fonction

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx . \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

les limites x_0, x_ω étant variables. En appliquant à cette expression ce qui a été dit dans les n°s 506 et 507, on verra d'abord que l'on a les deux équations indéfinies

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right)=0,$$

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right)=0,$$

d'où résulte

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=const.,$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=const,$$

On en conclut que les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ doivent avoir des valeurs constantes, propriété qui n'appartient qu'à la ligne droite. Posant donc

$$\frac{dy}{dx}=b, \qquad \frac{dz}{dx}=c,$$

on aura

$$y=bx+m, \qquad z=cx+n,$$

pour les équations de la ligne cherchée, b, c, m et n étant des constantes arbitraires.

A l'égard des conditions relatives aux limites, l'équation déterminée appartenant au premier point de la ligne cherchée est ici

$$0=-\sqrt{1+\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2}.\delta x_0-$$

$$\frac{\frac{dy_0}{dx}\left(\delta y_0-\frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right)+\frac{dz_0}{dx}\left(\delta z_0-\frac{dz_0}{dx}\delta x_0\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2}}$$

qui se réduit à

$$0=\delta x_0+\frac{dy_0}{dx}\delta y_0+\frac{dz_0}{dx}\delta z_0.$$

Remarquons que dans cette équation $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ représentent respectivement les projections sur les axes des x, des y et des z, des déplacements qui peuvent être attribués au premier point de cette ligne. Or, d'après la supposition, ce point doit ici se trouver constamment sur la première des deux courbes entre lesquelles la ligne de plus courte distance doit être tracée. Donc les variations $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ peuvent être regardées comme les projections sur les axes de l'élément de cette courbe voisin du premier point dont il s'agit. D'où l'on conclut que l'équation précédente exprime la condition que la ligne de plus courte distance doit être perpendiculaire à cet élément.

On obtiendra une équation pareille pour l'autre extrémité de la ligne cherchée. La ligne la plus courte est donc une droite perpendiculaire aux deux courbes entre lesquelles elle est tracée.

On se trouverait conduit à un résultat semblable si la ligne de plus courte distance devait être menée entre

deux surfaces courbes données. Les variations $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ de l'équation précédente devraient être alors regardées comme exprimant les projections sur les axes d'un élément linéaire quelconque tracé à partir du premier point de cette ligne sur la surface courbe. Cette équation exprimerait donc que la ligne de plus courte distance doit être perpendiculaire à la surface.

Il en serait encore de même si la ligne de plus courte distance devait être tracée entre une courbe et une surface courbe donnée Elle devrait toujours rencontrer l'une et l'autre à angle droit.

516. Admettons maintenant que la ligne la plus courte doit être tracée sur une surface donnée. L'intégrale qu'il s'agit de rendre un minimum étant toujours

$$\int_{x_0}^{x_n} dx.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

on doit, conformément au n° 507, poser en premier lieu [en écrivant pour abréger V au lieu de

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\Bigg],$$

l'équation indéfinie

$$0=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right)\left(\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right)\left(\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x\right);$$

et les variations $\delta x, \delta y, \delta z$ sont assujetties à satisfaire à l'équation de la surface que nous représentons par

$$z = F(x, y).$$

On a donc entre ces variations l'équation de condition

$$\delta z = \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y;$$

et si, après avoir mis au lieu de δz cette valeur dans l'équation précédente, on égale séparément à zéro les coefficients de δy et δz, qui restent indéterminés, il viendra

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right),$$

$$0 = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx} - \frac{dF}{dx}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right).$$

La ligne cherchée étant tracée sur la surface dont l'équation est $z=F(x,y)$, les éléments dx, dy, dz des coordonnées des points de cette ligne doivent satisfaire à cette équation, en sorte que l'on a $\frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}$. Cette valeur, substituée dans la seconde des deux équations ci-dessus, la rend identique avec la première, ainsi que cela doit être.

Cette première équation détermine la nature de la ligne de plus courte distance qui est l'objet de la question : elle en exprime une propriété géométrique qui consiste en ce que son plan osculateur est constamment perpendiculaire à la surface sur laquelle cette ligne est tracée.

En effet, l'équation du plan osculateur étant, d'après le n° 232

$$z = \frac{\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)x + \frac{d^2z}{dx^2}y}{\frac{d^2y}{dx^2}} + C;$$

et l'équation du plan tangent à la surface dont l'équation est $z=F(x,y)$ étant, d'après le n° 217

$$z=\frac{dF}{dx}x+\frac{dF}{dy}.y+K,$$

C et K désignant des constantes ; la condition nécessaire pour que ces deux plans soient perpendiculaires l'un à l'autre est, par le n° 215

$$\frac{\frac{dF}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}+1=0;$$

ou, en éliminant $\frac{dF}{dx}$ au moyen de l'équation

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx},$$

$$\left(\frac{dz}{dx}-\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

ou bien

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$+\frac{dF}{dy}\left[\frac{d^2z}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right]=0,$$

résultat identique avec l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right)=0,$$

ainsi qu'on peut le vérifier en effectuant dans cette dernière les différentiations indiquées.

Les conditions relatives aux limites se déduiront, comme dans le n° 515, en considérant d'abord le premier point de la courbe, de l'équation déterminée

$$0=\delta x_0+\frac{dy_0}{dx}\delta y_0+\frac{dz_0}{dx}\delta z_0.$$

Si ce premier point est donné de position sur la surface, cette équation est satisfaite, puisque l'on a alors $\delta x_0=0, \delta y_0=0, \delta z_0=0$. Mais si la ligne de plus courte distance doit partir d'une ligne courbe donnée tracée sur la surface, les quantités $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$, expriment alors les projections sur les axes des x, des y, et des z, de l'élément de cette ligne courbe; et par conséquent, l'équation précédente montre que la ligne de plus courte distance doit être perpendiculaire à cet élément.

On obtiendrait un résultat analogue pour l'extrémité opposée. Ainsi la ligne la plus courte doit couper à angles droits les deux courbes entre lesquelles elle est tracée.

517. La recherche de la surface dont l'aire est un minimum, est un problème analogue au précédent. Nous supposerons que cette surface doit se terminer à un contour déterminé dont la projection sur le plan des x, y est donnée. L'intégrale qu'il s'agit de rendre un maximum est ici

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1},$$

et on doit lui appliquer les notions exposées dans les nos 508 et suivants. Nous aurons donc, conformément au no 511, l'équation indéfinie

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}\right);$$

c'est-à-dire, en effectuant les différentiations indiquées,

$$0=\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1\right]\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dxdy}+\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+1\right]\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Cette équation aux différences partielles du second ordre appartient à la surface demandée. Les fonctions arbitraires qui entreront dans son intégrale devraient être déterminées de manière à faire passer la surface par le contour donné. Lorsque ce contour est fixé, les équations déterminées relatives aux limites de l'intégrale sont vérifiées d'avance, et ne donnent lieu à aucune condition particulière.

518. Considérons encore le plus simple des problèmes connus sous le nom d'Isopérimètres, dont l'objet consiste à déterminer la figure de la courbe qui, sous un contour donné, comprend la plus grande aire possible. Il s'agit de rendre un maximum la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \cdot y,$$

tandis que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

conserve une valeur déterminée. Cette question se résout, conformément à ce qui a été dit n° 514, en déterminant les conditions du maximum absolu de la fonction

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left[y+a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right],$$

a désignant un nombre indéterminé. Nous supposerons

les limites x_0 et x_ω invariables. En appliquant donc les notions exposées n° 499 et suivants, l'équation indéfinie du n° 501, sera ici

$$0=1-a\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right),$$

d'où l'on tire en intégrant une première fois

$$x-\alpha-a\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=0,\quad \text{ou}\quad dy=\frac{(x-\alpha)dx}{\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}},$$

α étant une constante arbitraire; et en intégrant une seconde fois,

$$y-6=-\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2},\qquad \text{ou}\qquad (x-\alpha)^2+(y-6)^2=a^2,$$

6 étant la seconde constante arbitraire. Ainsi le cercle résout en général la question proposée. La position du centre et le rayon peuvent être déterminés de manière à faire passer la circonférence par deux points donnés, et à donner à l'arc compris entre ces points une valeur déterminée.

519. Nous traiterons enfin la question de la brachystochrône, ou courbe de la plus vite descente, en supposant que la vitesse initiale du mobile soumis à l'action de la gravité est nulle, et qu'il doit passer dans le moindre temps possible d'un point quelconque d'une courbe donnée à un point quelconque d'une autre courbe également donnée. L'axe des x étant supposé vertical, la fonction qu'il s'agit de rendre un minimum est

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{x-x_0}},$$

x_0 et x_ω représentant les abscisses des points extrêmes de la courbe décrite. Ces abscisses étant variables, on doit opérer ici conformément à ce qui a été dit dans les n°s 505 et 507. Il faut remarquer de plus que la quantité x_0 entre dans la fonction qui se trouve sous le signe $\int$. Nous avons en comparant aux formules des numéros cités :

$$V=\sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{x-x_0}},$$

$$N=0,\ P=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}};$$

$$n=0,\ p=\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}.$$

Les équations indéfinies qui doivent subsister pour tous les points de la ligne cherchée sont

$$\frac{dP}{dx}=0, \qquad \frac{dp}{dx}=0;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=B,$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=\text{C},$$

B et C étant des constantes. Ces équations donnent

$$\frac{dz}{dy}=\frac{\text{C}}{\text{B}},$$

d'où l'on conclut en premier lieu que la projection de la courbe cherchée sur le plan horizontal des yz est une ligne droite, et par conséquent que cette courbe est contenue dans un plan vertical.

Pour reconnaître la nature de la courbe dont il s'agit, on peut supposer que le plan vertical des xy se confond avec celui dans lequel elle est placée. Son équation différentielle se réduira alors à

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\text{B};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x-x_0}{\frac{1}{\text{B}^2}-(x-x_0)}},$$

équation qui appartient à une cycloïde dont la base est une ligne horizontale passant par le point de départ du mobile. Le diamètre du cercle générateur est représenté par la constante $\frac{1}{\text{B}^2}$. On voit que le premier élément de la courbe de la plus vite descente sera toujours vertical.

A l'égard des conditions relatives aux limites de l'intégrale, l'équation déterminée donnée par les termes qui ne sont point sous le signe d'intégration, est ici

$$\left[\begin{array}{l} -V_0\delta x_0 - P_0\left(\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right) - p_0\left(\delta z_0 - \frac{dz_0}{dx}\delta x_0\right) \\ +V_\omega\delta x_\omega + P_\omega\left(\delta y_\omega - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) + p_\omega\left(\delta z_\omega - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) \\ +\delta x_0 \int_{x_0}^{x_\omega} dx.\mu \end{array}\right]$$

$$=0;$$

et l'on a

$$\mu = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{2(x-x_0)^{\frac{3}{2}}}.$$

On trouvera la valeur de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_\omega} dx\mu$ en remarquant que la différentielle complète de la fonction V est

$$dV = -\mu dx + Pd\left(\frac{dy}{dx}\right) + pd\left(\frac{dz}{dx}\right).$$

Mais on a vu ci-dessus que les fonctions P et p devaient être constantes dans toute l'étendue de la courbe. On peut donc écrire P_ω et p_ω au lieu de P et p, ce qui donne

$$dV = -\mu dx + P_\omega d\left(\frac{dy}{dx}\right) + p_\omega d\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\mu = V_0 - V_\omega + P_\omega\left(\frac{dy_\omega}{dx} - \frac{dy_0}{dx}\right) + p_\omega\left(\frac{dz_\omega}{dx} - \frac{dz_0}{dx}\right).$$

Substituant cette valeur dans l'équation déterminée

précédente, et remarquant que $P_0 = P_\omega$ et $p_0 = p_\omega$, on trouve

$$\left[\begin{array}{l} -V_\omega \delta x_0 - P_\omega \left(\delta y_0 - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_0\right) - p_\omega\left(\delta z_0 - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_0\right) \\ +V_\omega \delta x_\omega + P_\omega \left(\delta y_\omega - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) + p_\omega\left(\delta z_\omega - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) \end{array}\right] = 0,$$

ou, en remplaçant V_ω, P_ω et p_ω par leurs valeurs,

$$0 = \left[\begin{array}{l} -\delta x_0 - \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_0 - \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_0 \\ +\delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_\omega \end{array}\right].$$

Les variations des coordonnées des deux points extrêmes de la courbe étant respectivement indépendantes l'une de l'autre, cette équation se partage dans les deux suivantes

$$0 = \delta x_0 + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_0 + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_0$$
$$0 = \delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_\omega,$$

qui indiquent évidemment que le dernier élément de la courbe cherchée doit être perpendiculaire à la fois aux tangentes menées aux deux courbes données dans les points de départ et d'arrivée du mobile. Il en résulte que si les deux courbes étaient données dans un même plan vertical, leurs tangentes menées aux points extrêmes de la brachystochrône devraient être parallèles entre elles.

Ainsi la courbe demandée est une portion de cycloïde dont la base est horizontale et dont l'origine est au point

de départ du mobile. Elle coupe à angles droits la courbe d'arrivée, et l'origine est tellement placée sur la courbe de départ, que la tangente menée par cette origine à cette courbe est perpendiculaire à la tangente menée à l'extrémité inférieure de la portion cycloïdale.

XL. CALCUL DES DIFFÉRENCES FINIES.

520. Le caractère de l'analyse différentielle, et ce qui la distingue de l'analyse ordinaire, ou de l'analyse algébrique, consiste en ce qu'on y regarde les quantités comme variables, et que l'on considère à la fois la succession infinie des valeurs qui peuvent leur être attribuées; tandis que dans l'analyse algébrique on regarde toujours les quantités comme ayant des valeurs déterminées connues ou inconnues. Dans le calcul différentiel proprement dit, les valeurs successives des quantités sont censées se succéder d'une manière continue, et par intervalles infiniment petits, c'est-à-dire plus petits que toute grandeur donnée. L'objet principal de ce calcul consiste dans la recherche des rapports qui existent entre les variations correspondantes des variables et des fonctions dépendantes de ces variables, rapports qui donnent naissance à de nouvelles fonctions dont la considération est nécessaire dans les applications principales des mathématiques aux arts et à la philosophie naturelle. Dans le calcul aux différences, les quantités sont supposées varier par intervalles déterminés et d'une grandeur finie. Cette partie de l'analyse considère d'ailleurs, aussi bien que le calcul différentiel, les relations qui existent entre les variations des variables et celles des fonctions qui en dépendent.

521. Le calcul des différences finies est fondé sur

un algorithme qu'il faut d'abord faire connaître. Soit u une fonction quelconque d'une ou de plusieurs variables indépendantes x, y, z, etc. La composition de la fonction u est donnée, et l'on regarde les variables indépendantes comme pouvant prendre successivement plusieurs valeurs déterminées x_0, y_0, z_0, etc. ; x_1, y_1, z_1, etc.; x_2, y_2, z_2, etc. ; x_3, y_3, z_3, etc. ; et ainsi de suite. Le plus ordinairement ces variables sont supposées varier par différences constantes, et quelquefois par intervalles égaux à l'unité. La loi de cette variation, quelle qu'elle puisse être, est supposée donnée. En vertu des variations dont il s'agit, la fonction u prendra également une suite de valeurs déterminées, que nous représenterons par

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; u_3, \; u_4 \ldots\ldots\ldots u_{n-1}, \; u_n ;$$

et nous écrirons comme dans l'article VI,

u_0			
u_1	$u_1 - u_0 = \Delta u_0$		
u_2	$u_2 - u_1 = \Delta u_1$	$\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0$	
u_3	$u_3 - u_2 = \Delta u_2$	$\Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1$	etc.
u_4	$u_4 - u_3 = \Delta u_3$	$\Delta u_3 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_2$	
	. . . .	$\Delta u_4 - \Delta u_3 = \Delta^2 u_3$	
	. . . .	. . . .	
u_{n-1}	. . . .	. . . .	
u_n	$u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1}$	. . . .	
		$\Delta u_n - \Delta u_{n-1} = \Delta^2 u_{n-1}$	

On voit que le signe Δ indique la différence entre la valeur actuelle de la quantité affectée de ce signe, et la valeur que reçoit cette quantité par l'effet d'un changement fini, attribué aux valeurs des variables dont elle dépend. Δu_0 est la *différence* de la fonction u_0. On re-

présente par $\Delta\Delta u_0$, ou $\Delta^2 u_0$, la différence de Δu_0, ou la *différence seconde* de la fonction u_0. On représente également par $\Delta\Delta^2 u_0$, ou $\Delta^3 u_0$, la différence de $\Delta^2 u_0$, ou la *différence troisième* de la fonction u_0. Et ainsi de suite. Il existe entre les valeurs successives d'une fonction et ses différences de divers ordres des relations générales, et tout à fait indépendantes de la nature de cette fonction et de la loi de sa variation.

522. En effet, on trouve par de simples substitutions, comme on l'a vu dans l'article X,

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0$$
$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0$$
$$u_3 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0$$
$$u_4 = u_0 + 4\Delta u_0 + 6\Delta^2 u_0 + 4\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0$$

. . . .

. . . .

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + .. + \Delta^n u_0,$$

formule qui peut s'écrire d'une manière abrégée

$$u_n = (1 + \Delta u_0)^n,$$

en observant de changer, après le développement de la puissance indiquée, $(\Delta u_0)^r$ en $\Delta^r u_0$.

523. On trouve également, par des substitutions successives :

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0$$
$$\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0$$
$$\Delta^3 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0$$
$$\Delta^4 u_0 = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^n u_0 = u_n - n.u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u_{n-3} + \ldots \pm u_0.$$

Cette formule peut s'écrire

$$\Delta^n u_0 = (u_0 - 1)^n ,$$

en observant de changer, après le développement, u^r en u_r. Elle peut servir à trouver directement les différences d'un ordre quelconque d'une fonction proposée, au moyen d'un certain nombre de valeurs successives de cette fonction. Le nombre des valeurs qu'il est nécessaire de connaître est égal à l'ordre de la différence cherchée.

524. On indique par le signe Σ une opération inverse de celle qui est indiquée par le signe Δ. Ainsi Σu_0 représente la quantité dont la différence est u_0. Nous écrirons donc, en continuant le tableau précédent vers la gauche,

etc.,	$\Sigma^2 u_1 - \Sigma^2 u_0 = \Sigma u_0$		
	$\Sigma^2 u_2 - \Sigma^2 u_1 = \Sigma u_1$	$\Sigma u_1 - \Sigma u_0 = u_0$	u_0
	$\Sigma^2 u_3 - \Sigma^2 u_2 = \Sigma u_2$	$\Sigma u_2 - \Sigma u_1 = u_1$	u_1
	$\Sigma^2 u_4 - \Sigma^2 u_3 = \Sigma u_3$	$\Sigma u_3 - \Sigma u_2 = u_2$	u_2
	. . . .	$\Sigma u_4 - \Sigma u_3 = u_3$	u_3
	. . . .	. . . .	. . .
	. . . .	. . . .	. . .
	$\Sigma^2 u_{n+1} - \Sigma^2 u_n = \Sigma u_n$	. . . .	. . .
		$\Sigma u_{n+1} - \Sigma u_n = u_n$	u_n
			u_{n+1} ;

d'où l'on déduit

$$\Sigma u_1 = \Sigma u_0 + u_0$$
$$\Sigma u_2 = \Sigma u_0 + u_0 + u_1$$
$$\Sigma u_3 = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2$$
$$\Sigma u_4 = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

. . . .

. . . .

$$\Sigma u_n = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1}.$$

On voit que Σu_n, ou l'intégrale finie de u_n, c'est-à-dire la quantité dont la différence est u_n, se forme de l'addition des n valeurs de la fonction u qui précèdent la valeur u_n, et d'une quantité Σu_0 qu'il faut regarder ici en général comme une constante arbitraire. En effet, supposant u donnée, et par conséquent u_0, u_1, u_2, u_3, etc., on n'a assujetti, en écrivant les équations précédentes, les quantités Σu et Σu_0 à aucune autre condition, si ce n'est celle d'avoir pour différence u_0. Donc l'une de ces quantités est une constante arbitraire.

On déduit également des équations précédentes;

$$\Sigma^2 u_1 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0$$
$$\Sigma^2 u_2 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1$$
$$\Sigma^2 u_3 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1 + \Sigma u_2$$
$$\Sigma^2 u_4 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1 + \Sigma u_2 + u_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma^2 u_n = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1 + \Sigma u_2 + \Sigma u_3 + \ldots\ldots + \Sigma u_{n-1};$$

puis

$$\Sigma^3 u_1 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0$$
$$\Sigma^3 u_2 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1$$
$$\Sigma^3 u_3 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^2 u_2$$
$$\Sigma^3 u_4 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^2 u_2 + \Sigma^2 u_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma^3 u_n = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^2 u_2 + \Sigma^2 u_3 + \ldots\ldots + \Sigma^2 u_{n-1};$$

et ainsi de suite. On a en général

$$\Sigma^i u_n = \Sigma^i u_0 + \Sigma^{i-1} u_0 + \Sigma^{i-1} u_1 + \Sigma^{i-1} u_2 + \ldots + \Sigma^{i-1} u_{n-1}.$$

On doit remarquer que dans la valeur de $\Sigma^2 u_n$, il entre deux constantes arbitraires, qui sont $\Sigma^2 u_0$ et Σu_0. Dans la valeur de $\Sigma^3 u_n$, il entre explicitement les deux arbitraires $\Sigma^3 u_0$ et $\Sigma^2 u_0$, et implicitement l'arbitraire Σu_0 qui

est comprise dans $\Sigma^2 u_1$, $\Sigma^2 u_3$, etc., et ainsi de suite. Enfin dans la valeur de $\Sigma^i u_n$, il entre explicitement les deux arbitraires $\Sigma^i u_0$ et $\Sigma^{i-1} u_0$, et implicitement les $i-2$ arbitraires $\Sigma^{i-2} u_0, \Sigma^{i-3} u_0$, $\Sigma^{i-4} u_0, \ldots\ldots \Sigma u_0$ qui sont comprises dans $\Sigma^{i-1} u_1, \Sigma^{i-1}{}_2, \Sigma^{i-1} u_3$, etc. ; en sorte que l'intégrale $\Sigma^i u_n$ comprend toujours i constantes arbitraires.

525. Nous devons remarquer d'ailleurs qu'il n'est pas toujours indispensable que dans l'intégrale

$$\Sigma u_n = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1},$$

la quantité désignée par Σu_0, qui la complète, soit une constante. On pourrait prendre pour cette quantité une fonction quelconque des variables qui entrent dans la fonction u, pourvu que la fonction dont il s'agit eût la propriété de ne point changer de valeur lorsque ces variables prendraient leurs valeurs successives. On sait qu'il existe plusieurs fonctions trigonométriques qui présentent cette propriété quand on fait varier les variables par différences constantes.

Différentiation des fonctions.

526. Soit u une fonction contenant une seule variable x. Différentier la fonction u, c'est chercher la valeur de l'accroissement Δu que reçoit cette fonction lorsque la variable x devient $x + \Delta x$. Ainsi de l'équation

$$u = f(x),$$

nous concluons en général

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Si la fonction u contient plusieurs variables indépendantes x, y, z, etc., cette fonction peut être différentiée

séparément par rapport à chacune des variables. Posant

$$u = f(x, y, z, \text{ etc.}),$$

ces différences sont exprimées séparément par

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x = f(x+\Delta x, y, z, \text{ etc.}) - f(x, y, z, \text{ etc.}),$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta y}\Delta y = f(x, y+\Delta y, z, \text{ etc.}) - f(x, y, z, \text{ etc.}),$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta z}\Delta z = f(x, y, z+\Delta z, \text{ etc.}) - f(x, y, z, \text{ etc.}),$$

etc.

La *différence totale* est

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \text{ etc.}) - f(x, y, z, \text{ etc.}).$$

Cette différence totale n'est pas, en général, égale à la somme des différences partielles. Elle le serait si la fonction $f(x, y, z, \text{ etc.})$ était une fonction rationnelle et entière, et si les variables x, y, z, etc. n'étaient pas multipliées les unes par les autres.

527. Considérons en premier lieu les fonctions rationnelles et entières d'une seule variable x. Elles sont composées de termes de la forme Ax^k, A et k étant des constantes : la recherche de leurs différences se réduit à trouver celles de la quantité x^k.

Nous avons généralement

$$\Delta . x^k = (x+\Delta x)^k - x^k,$$

ou bien

$$\Delta . x^k = kx^{k-1}\Delta x + \frac{k(k-1)}{1.2}x^{k-2}(\Delta x)^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}x^{k-3}(\Delta x)^3 + \ldots\ldots + (\Delta x)^k.$$

Si la différence Δx est supposée constante, on obtient facilement l'expression générale de la différence d'un ordre quelconque de la fonction proposée. En effet on a alors

$$\begin{aligned} u_0 &= x^k, \\ u_1 &= (x+\ \Delta x)^k, \\ u_2 &= (x+2\Delta x)^k, \\ u_3 &= (x+3\Delta x)^k, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

et la formule du n° 523 donne

$$\Delta^n . x^k = (x+n\Delta x)^k - n[x+(n-1)\Delta x]^k + \frac{n(n-1)}{1.2}[x+(n-2)\Delta x]^k - \text{etc.};$$

ou en développant et ordonnant par rapport aux puissances de Δx,

$$\Delta^n . x^k = \left[\begin{aligned} &\left[1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\ldots\ldots\ldots\ldots\right]x^k \\ &+k\left[n-\frac{n}{1}(n-1)+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)-\ldots\ldots\ldots\right]x^{k-1}\Delta x \\ &+\frac{k(k-1)}{1.2}\left[n^2-\frac{n}{1}(n-1)^2+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^2-\ldots\right]x^{k-2}(\Delta x)^2 \\ &+\text{etc.}, \end{aligned}\right.$$

expression dont la loi est évidente.

528. Nous remarquerons d'ailleurs : 1° que le terme affecté de x^k est nul, quel que soit le nombre entier n, comme on peut le vérifier ; 2° que la quantité

$$n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^i + \text{etc.}$$

est également nulle, tant que i est plus petit que n, ce

que l'on peut également vérifier, et ce qui doit être, puisque l'expression $\Delta^n.x^i$ ne peut pas contenir de puissances de Δx inférieures à la puissance n; 3° enfin que l'on a toujours

$$1.2.3\ldots\ldots n = n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n - \text{etc.},$$

comme on peut s'en assurer. Nous écrirons donc simplement au lieu de l'expression précédente

$$\Delta^n.x^k =$$

$$\left[\begin{array}{l} k(k-1)(k-2)\ldots\ldots(k-n+1)\ x^{k-n}\Delta x^n \\ + \dfrac{k(k-1)(k-2)\ldots\ldots(k-n)}{1.2.3\ldots\ldots(n+1)}\Big[n^{n+1} - n(n-1)^{n+1} \\ \qquad\qquad + \dfrac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+1} - \ldots\ldots\Big]\, x^{k-n-1}\Delta x^{n+1} \\ + \dfrac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(n+1)]}{1.2.3\ldots\ldots(n+2)}\Big[n^{n+2} - n(n-1)^{n+2} \\ \qquad\qquad + \dfrac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+2} - \ldots\ldots\Big]\, x^{k-n-2}\Delta x^{n+2} \\ + \dfrac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(n+2)]}{1.2.3\ldots\ldots(n+3)}\Big[n^{n+3} - n(n-1)^{n+3} \\ \qquad\qquad + \dfrac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+3} - \ldots\ldots\Big]\, x^{k-n-3}\Delta x^{n+3} \\ + \text{etc.}\ldots\ldots \end{array}\right].$$

On peut remarquer que dans le cas où l'exposant k est un nombre entier et positif : 1° la valeur de la différence de l'ordre k de la fonction x^k se réduit à une constante dont l'expression est

$$\Delta^k.x^k = k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots\ldots 3.2.1\,\Delta x^k;$$

2° l'expression précédente de $\Delta^n . x^k$ se termine alors par un dernier terme qui est

$$\left[n^k - n(n-1)^k + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^k - \ldots\ldots\right] \Delta x^k.$$

Ces résultats donneront les différences d'un ordre quelconque de toutes les fonctions de la forme

$$Ax^\alpha + Bx^\zeta + Cx^\gamma + \text{etc.}$$

528. Parmi les fonctions rationnelles on distingue, à raison de la simplicité de l'expression de leurs différences, les produits de facteurs équi-différents, tels que la fonction

$$u = (a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots.[a+x+(k-1)\Delta x].$$

On trouve facilement

$$\Delta^n u = [a+x+n\Delta x]\,[a+x+(n-1)\Delta x]\ldots\ldots[a+x+(k-1)\Delta x] \times k(k-1)(k-2)\ldots\ldots(k-n+1).\Delta x^n.$$

529. Quant aux fonctions fractionnaires, on en obtient les différences en les décomposant en fractions simples par les méthodes connues. L'expression de la différence se simplifie lorsque le numérateur est une constante et le dénominateur un produit de facteurs équi-différents. Soit

$$u = \frac{A}{(a+x)\,(a+x+\Delta x)\,(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots\ldots[a+x+(k-1)\Delta x]};$$

on a

$$\Delta^n u = \frac{\pm A.k(k+1)\,(k+2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(k+n-1).\Delta x^n}{(a+x)\,(a+x+\Delta x)\,(a+x+2\Delta x)\ldots..[a+x+(k+n-1)\Delta x]}.$$

Les signes + ou — ont lieu respectivement lorsque n est pair ou impair.

530. Nous considérerons maintenant les fonctions transcendantes. Soit

$$u = \log. x :$$

nous aurons

$$\Delta u = \log.(x+\Delta x) - \log. x = \log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right);$$

et en développant

$$\Delta u = \mathrm{M}\left[\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^4 + \text{etc.}\right].$$

Si la différence Δx est supposée constante, on a

$$u_1 = \log.(x+\Delta x) = \log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) + \log. x,$$

$$u_2 = \log.(x+2\Delta x) = \log.\left(1+\frac{2\Delta x}{x}\right) + \log. x,$$

$$u_3 = \log.(x+3\Delta x) = \log.\left(1+\frac{3\Delta x}{x}\right) + \log. x,$$

etc.

En développant ces expressions et les substituant dans les formules du nº 523, on trouvera

$$\Delta \log. x = \mathrm{M}\left[\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \text{etc.}\right],$$

$$\Delta^2 \log. x = \mathrm{M}\left[\quad - \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \text{etc.}\right],$$

$$\Delta^3 \log. x = \mathrm{M}\left[\qquad\qquad \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \text{etc.}\right],$$

etc.

M est le module logarithmique, c'est-à-dire le nombre par lequel il faut multiplier les logarithmes hyperboliques pour avoir ceux du système de logarithmes dans lequel on calcule.

531. La fonction exponentielle a^x donne, en supposant toujours la différence Δx constante,

$$\Delta\, a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$$
$$\Delta^2 a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^2$$
$$\Delta^3 x^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^n a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^n.$$

532. A l'égard des fonctions trigonométriques, en partant des formules connues

$$\sin.\mathrm{A} - \sin.\mathrm{B} = 2\sin.\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}).\cos.\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}),$$

$$\cos.\mathrm{A} - \cos.\mathrm{B} = -2\sin.\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}).\cos.\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}),$$

on trouve

$$\Delta\sin.x = \sin.(x+\Delta x) - \sin.x = 2\sin.\frac{1}{2}\Delta x.\cos.\frac{1}{2}(2x+\Delta x),$$

$$\Delta\cos.x = \cos.(x+\Delta x) - \cos.x = -2\sin.\frac{1}{2}\Delta x.\sin.\frac{1}{2}(2x+\Delta x);$$

puis

$$\Delta^2\sin.x = 2\sin.\frac{1}{2}\Delta x\left[\cos.\frac{1}{2}(2x+3\Delta x) - \cos.\frac{1}{2}(2x+\Delta x)\right]$$
$$= -4\sin.^2\frac{1}{2}\Delta x.\sin.(x+\Delta x).$$

Et en continuant de la même manière, on parvient aux formules générales

$$\Delta^{2n}\sin.x = \pm 2^{2n}\sin.^{2n}\frac{1}{2}\Delta x.\sin.\frac{1}{2}(2x+2n\Delta x)$$

$$\Delta^{2n+1}\sin.x = \pm 2^{2n+1}\sin.^{2n+1}\frac{1}{2}\Delta x.\cos.\frac{1}{2}\left[2x+(2n+1)\Delta x\right].$$

Les signes + ou — ont lieu respectivement suivant que le nombre n est pair ou impair.

La différence de l'ordre n de la fonction $\sin. x$ s'exprime d'une manière encore plus simple au moyen des différences des ordres $n-1$ et $n-2$. On obtient en effet l'expression

$$\Delta^n \sin. x = -2^2 \sin.^2 \frac{1}{2} \Delta x \, (\Delta^{n-1} \sin. x + \Delta^{n-2} \sin. x),$$

qui se déduit des précédentes.

533. On pourra toujours, d'après ce qui précède, et conformément à ce qu'on a vu n° 526, obtenir les différences partielles ou totales des fonctions de plusieurs variables.

Soit par exemple la fonction

$$u = xy:$$

on trouve, en supposant Δx constante

$$\begin{aligned} \Delta u &= (x + \Delta x) \Delta y + \Delta x . y \\ \Delta^2 u &= (x + 2\Delta x) \Delta^2 y + 2 \Delta x \, \Delta y \\ \Delta^3 u &= (x + 2\Delta x) \Delta^3 y + 3 \Delta x . \Delta y \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Soit encore la fonction

$$u = \frac{x}{y}:$$

on aura

$$\Delta u = \frac{y \Delta x - x \Delta y}{y^2} \left[1 - \frac{\Delta y}{\Delta} + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 - \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^3 + \text{etc.} \right].$$

534. Les différences totales des fonctions de plusieurs variables s'expriment au moyen de leurs différences partielles, par des formules remarquables. Soit u une fonction des deux variables x, y, dont nous supposons les différences Δx et Δy constantes. On a

$$\Delta u = \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta x + \frac{\Delta u}{\Delta y} \Delta y + \frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y} \Delta x \Delta y,$$

expression qui peut s'écrire

$$\Delta u=\left[\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\,\Delta x\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta y}\,\Delta y\right)-1\right]u.$$

Et l'on trouvera

$$\Delta^2 u=\left[\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\,\Delta x\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta y}\,\Delta y\right)-1\right]^2 u$$

$$\Delta^3 u=\left[\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\,\Delta x\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta y}\,\Delta y\right)-1\right]^3 u$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^n u=\left[\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\,\Delta x\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta y}\,\Delta y\right)-1\right]^n u.$$

On obtient des formules analogues lorsque la fonction proposée contient un plus grand nombre de variables. Si u contient les trois variables x,y,z, on a également

$$\Delta^n u=\left[\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\,\Delta x\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta y}\,\Delta y\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta z}\,\Delta z\right)-1\right]^n u;$$

et ainsi de suite.

Intégration des fonctions.

535. Soit en premier lieu la fonction x^m. En écrivant $m+1$ au lieu de k dans la formule du n° 527, elle devient

$$\Delta . x^{m+1}=\frac{m+1}{1}\,x^m(\Delta x)+\frac{m+1}{1}\,\frac{m}{2}\,x^{m-1}(\Delta x)^2+\ldots..+(\Delta x)^{m+1}$$

et donne, en prenant l'intégrale de chaque membre,

$$x^{m+1}=\frac{m+1}{1}\,\Sigma x^m.(\Delta x)+\frac{m+1}{1}\,\frac{m}{2}\,\Sigma x^{m-1}(\Delta x)^2+\ldots.+\Sigma x^0(\Delta x)^{m+1};$$

d'où l'on déduit

$$\Sigma x^m=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x}-\frac{1}{m+1}\left[\frac{m+1}{1}\,\frac{m}{1}\,(\Delta x)\Sigma x^{m-1}\right.$$
$$\left.+\frac{m+1}{1}\,\frac{m}{2}\,\frac{m-1}{3}\,(\Delta x)^2\Sigma x^{m-2}+\ldots\ldots+(\Delta x)^m\,\Sigma x^0\right].$$

Si l'on fait successivement dans cette formule $m=0$, $=1, =2$, etc., on trouvera

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{\Delta x}$$

$$\Sigma x^1 = \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{1}{2}\,x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x\,\Delta x$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\Delta x} - \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^2\Delta x$$

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\Delta x} - \frac{1}{2}\,x^4 + \frac{1}{3}\,x^3\Delta x - \frac{1}{30}\,x\,(\Delta x)^3$$

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\Delta x} - \frac{1}{2}\,x^5 + \frac{5}{12}\,x^4\Delta x - \frac{1}{12}\,x^2(\Delta x)^3$$

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\Delta x} - \frac{1}{2}\,x^6 + \frac{1}{6}\,x^5\Delta x - \frac{1}{6}\,x^3(\Delta x)^3 + \frac{1}{42}\,x(\Delta x)^5$$

etc.

Chacune de ces intégrales doit être complétée par une constante arbitraire. Cette constante se détermine lorsqu'on fixe en même temps le premier terme de la série des quantités $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots$ ou $x_0, x_0+\Delta x, x_0+2\Delta x$, etc.; et le premier terme de la série des quantités $\Sigma x_0, \Sigma x_1, \Sigma x_2$, etc.

Ces résultats donneront les intégrales de toutes les fonctions algébriques rationnelles et entières, l'incrément Δx étant supposé constant.

536. On a, d'après le n° 528, en écrivant m au lieu de $k-1$,

$$\Delta\left\{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)\right\} =$$
$$(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x).(m+1)\Delta x\,;$$

et par conséquent en intégrant de part et d'autre,

$$\Sigma\left\{(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)\right\}=$$

$$\frac{1}{(m+1)\Delta x}(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots(a+x+m\Delta x)+const.$$

537. On a également, d'après le n° 529,

$$\Delta\left\{\frac{A}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots[a+x+(m+1)\Delta x]}\right\}=$$

$$\frac{-Am\Delta x}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)};$$

et par conséquent

$$\Sigma\left[\frac{A}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)}\right]=$$

$$\frac{1}{m\Delta x}\,\frac{-A}{(a+x)(a+x\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots[a+x+(m-1)\Delta x]}+const.$$

538. L'équation

$$\Delta a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$$

du n° 531 donne

$$\Sigma a^x=\frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}+C,$$

C étant la constante arbitraire; d'où l'on passe facilement à

$$\Sigma^2a^x=\frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^2}+\Sigma C$$

$$\Sigma^3a^x=\frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^3}+\Sigma^2C$$

. . . .

. . . .

$$\Sigma^na^x=\frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^n}+\Sigma^{n-1}C.$$

Quant aux expressions $\Sigma C, \Sigma^2 C, \ldots \Sigma^{n-1} C$, il faut remarquer que, d'après le n° 535, $\Sigma x^0 = \Sigma 1 = \frac{x}{\Delta x}$. Donc $\Sigma C = \frac{Cx}{\Delta x} + C'$, C étant une nouvelle constante arbitraire. Les formules du même numéro donneront également les expressions $\Sigma^2 C, \Sigma^3 C$, etc.; et l'on voit que l'intégrale $\Sigma^n a^x$ contiendra n constantes arbitraires, conformément à ce qui a été dit n° 523.

539. A l'égard des fonctions circulaires, l'équation

$$\Delta \cos. x = -2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x. \sin. \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right)$$

du n° 532 donne

$$\sin. \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right) = -\frac{\Delta \cos. x}{2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x}, \text{ et } \sin. x = -\frac{\Delta \cos. \left(x - \frac{1}{2} \Delta x\right)}{2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x};$$

d'où, en intégrant,

$$\Sigma \sin. x = -\frac{\cos. \left(x - \frac{1}{2} \Delta x\right)}{2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x} + const.$$

On déduira de la même manière de l'équation

$$\Delta \sin. x = 2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x. \cos. \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right)$$

du même numéro,

$$\Sigma \cos. x = \frac{\sin. \left(x - \frac{1}{2} \Delta x\right)}{2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x}.$$

On peut, au moyen de ces formules, intégrer les

fonctions composées de termes de la forme $\sin^m x . \cos^n x$ lorsque m et n sont des nombres entiers et positifs. En effet, ces fonctions peuvent être transformées en une suite de termes contenant les sinus ou cosinus des arcs multiples de l'arc x; et l'on a évidemment

$$\Sigma \sin.(p+qx) = -\frac{\cos.\left(p+qx-\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x}$$

$$\Sigma \cos.(p+qx) = \frac{\sin.\left(p+qx-\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x}.$$

540. Si l'on cherche à appliquer aux intégrales finies le procédé de l'intégration par parties, on posera, en désignant par P, Q deux fonctions quelconques de la variable x,

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P + z,$$

z étant une fonction de la même variable, qu'il s'agit de déterminer. Différentiant chaque membre de l'équation, il viendra,

$$PQ = (Q+\Delta Q).\,\Sigma(P+\Delta P) - Q.\Sigma P + \Delta z,$$

ou, (en remarquant que $\Sigma.\Delta P = P$),

$$0 = \Delta Q.\Sigma(P+\Delta P) + \Delta z, \quad \text{d'où} \quad z = -\Sigma[\Delta Q.\Sigma(P+\Delta P)].$$

Donc

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Sigma[\Delta Q.\Sigma(P+\Delta P)],$$

ou

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Sigma(\Delta Q.\Sigma P_{,});$$

et par suite

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.\Sigma^2 P_1 + \Sigma(\Delta^2 Q.\Sigma^2 P_2),$$
$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q.\Sigma^3 P_2 - \Sigma(\Delta^3 Q.\Sigma^3 P_3),$$
etc.
$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.(\Sigma^2 P_1) + \Delta^2 Q.\Sigma^3 P_2 - \Delta^3 Q.\Sigma^4 P_3 + \Delta^4 Q\ \Sigma^5 P_4 - \text{etc.}$$

Cette formule peut être mise aussi sous la forme

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.(\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^2 Q.(\Sigma^3 P + 2\Sigma^2 P + \Sigma P)$$
$$- \Delta^3 Q.(\Sigma^4 P + 3\Sigma^3 P + 3\Sigma^2 P + \Sigma P) + \text{etc.}$$

Elle s'arrête lorsque les différences d'un ordre quelconque de la fonction Q deviennent constantes.

Sommation des suites.

541. On a vu, nº 523, que l'on avait généralement

$$\Sigma u_n = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1},$$

formule dans laquelle Σu_0 représente une constante arbitraire. Par conséquent, si nous écrivons

$$Su_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_n;$$

c'est-à-dire si nous représentons en général par Su_n la somme des valeurs de la fonction u jusques à la valeur u_n, y compris cette valeur, nous aurons la relation

$$Su_n = \Sigma u_n + u_n + const.$$

On voit qu'il est nécessaire de distinguer l'*intégrale* désignée par le signe Σ de la *somme* désignée par le signe S. Ces quantités diffèrent en ce que la dernière exprime la somme des termes de la suite u_0, u_1, u_2, etc., jusques et compris le terme u_n, tandis que ce dernier terme n'est pas compris dans l'intégrale. On peut d'ailleurs supprimer l'indice n, et écrire simplement

$$Su = \Sigma u + u + const.$$

La constante se détermine d'après la connaissance du terme par lequel doit commencer la série des fonctions désignées par u, dont Su représente la somme.

542. Soit demandée, par exemple, la somme des puissances des nombres entiers. On fera dans les formules du n° 535, $\Delta x = 1$, et l'on aura, en déterminant la constante de manière que les séries commencent par l'unité, cas dans lequel sa valeur est nulle,

$$Sx = 1+2+3+4+\ldots\ldots+x = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$$

$$Sx^2 = 1+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots+x^2 = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$$

$$Sx^3 = 1+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots+x^3 = \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2$$

$$Sx^4 = 1+2^4+3^4+4^4+\ldots\ldots+x^4 = \frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x.$$

$$Sx^5 = 1+2^5+3^5+4^5+\ldots\ldots+x^5 = \frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{12}x^4-\frac{1}{12}x^2$$

$$Sx^6 = 1+2^6+3^6+4^6+\ldots\ldots+x^6 = \frac{1}{7}x^7+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{42}x$$

etc.

543. La formule du n° 536 donne

$$S\{(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots(a+x+m\Delta x)\} =$$

$$\frac{1}{(m+1)\Delta x}(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots[a+x+(m+1)\Delta x]+const.,$$

expression d'où l'on déduit la somme des suites des nombres figurés. Le terme général de ces suites est

$$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m},$$

et l'on a, en faisant dans la formule précédente $a=0$ et $\Delta x=1$,

$$S\frac{(x+1)(x+2)(x+3)..(x+m)}{1.2.3.......m}=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)..(x+m+1)}{1.2.3........(m+1)}+const.$$

Ainsi un terme quelconque de chaque suite donne la somme des termes de la suite précédente. On trouve en faisant successivement $m=1,=2,=3$, etc.

$$S\frac{x+1}{1}=1+2+3+4+..............+\frac{x+1}{1}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}$$
$$S\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}=1+3+6+10+........+\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}$$
$$S\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}=1+4+10+20+...+\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.2.3.4}$$

etc.

La constante est nulle lorsque les suites doivent commencer par l'unité.

544. La formule du n° 537 donne de la même manière

$$S\frac{1}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x).....(a+x+m\Delta x)}=$$
$$-\frac{1}{m\Delta x}\cdot\frac{1}{(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x).....(a+x+m\Delta x)}+const.,$$

et cette formule servira à sommer les suites dont les termes ont l'unité pour numérateur, et pour dénominateurs les nombres figurés. Le terme général de ces suites est

$$\frac{1.2.3...........m}{(x+1)(x+2)(x+3)...(x+m)};$$

et la formule précédente donne

$$\mathrm{S}\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+m)}$$
$$=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1.2.3\ldots\ldots m}{(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m)}+const.$$

Cette formule est en défaut lorsque $m=1$. En supposant $m=2,=3,=4$, etc., et déterminant la constante de manière que les séries commencent par l'unité, elle donne

$$\mathrm{S}\frac{1.2}{(x+1)(x+2)}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2}{(x+1)(x+2)}=\frac{2}{1}-\frac{1.2}{(x+2)}$$

$$\mathrm{S}\frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{3}{2}-\frac{1.2.3}{(x+2)(x+3)}$$

$$\mathrm{S}\frac{1.2.3.4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2.3.4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{4}{3}-\frac{1.2.3.4}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

etc.....

Les valeurs $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$, etc., de la constante donnent les valeurs des séries correspondantes quand on les suppose prolongées à l'infini.

545. Quant aux fonctions transcendantes, on déduit de l'expression de Σa^x du n° 538,

$$\mathrm{S}a^x=\frac{a^{x+\Delta x}}{a^{\Delta x}-1}+const.$$

546. Les expressions de $\Sigma \sin. x$ et $\Sigma \cos. x$ du n° 539 donnent

$$\text{S}\sin. x = -\frac{\cos.\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x} + const.,$$

$$\text{S}\cos. x = \frac{\sin.\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x} + const.$$

Ces formules donnent la somme d'une suite de termes formés de sinus ou cosinus d'arcs croissants en progression par différence. On en déduit en effet, en écrivant $p+qx$ à la place de x, et $q\Delta x$ à la place de Δx,

$$\text{S}\sin.(p+qx) = -\frac{\cos.\left(p+qx+\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x} + \frac{\cos.\left(p-\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x},$$

$$\text{S}\cos.(p+qx) = \frac{\sin.\left(p+qx+\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x} - \frac{\sin.\left(p-\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x},$$

la constante étant déterminée de manière que les séries commencent respectivement par les termes $\sin. p$ et $\cos. p$.

Intégration des équations aux différences finies, linéaires et à coefficients constants.

547. Considérons, comme dans les articles précédents, une variable indépendante x, et une fonction y de cette variable. La variation de x est la constante Δx, qui est toujours connue. Une équation aux différences

finies exprime en général une relation entre la variable x, la fonction y, et un certain nombre des différences Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc. de cette fonction.

On voit d'ailleurs sur-le-champ qu'en mettant à la place de Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc., les expressions générales du n° 523, la relation dont il s'agit se trouvera donnée entre x, y_0, y_1, y_2, y_3, etc., l'indice du terme le plus éloigné dans la série des valeurs de y étant égal à l'ordre le plus élevé des différences contenues dans l'équation proposée. D'où l'on voit qu'une équation aux différences finies n'est autre chose qu'une relation entre un certain nombre de termes consécutifs d'une série, par le moyen de laquelle on peut déterminer tous les termes de cette série, après en avoir pris arbitrairement un nombre égal à l'ordre de l'équation.

Intégrer une équation aux différences finies, c'est trouver l'expression du terme général de la série dont on vient de parler. Il résulte de ce qui précède que cette expression doit nécessairement contenir un nombre de constantes arbitraires égal à l'ordre le plus élevé des différences qui se trouvent dans l'équation, ou à l'indice le plus élevé des valeurs successives de la fonction y qui y sont contenues.

548. Le cas le plus simple est celui où l'équation proposée se réduit à

$$\Delta^n y = 0,$$

laquelle, d'après la formule citée du n° 523, revient à

$$y_n - n.y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} y_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} y_{n-3} - \ldots \pm y_0 = 0,$$

et d'où l'on tire

$$y_n=n.y_{n-1}-\frac{n(n-1)}{2}y_{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}y_{n-3}-\ldots\mp y_0.$$

Le terme de la série affecté de l'indice n est donné ici par la somme de n termes précédents, multipliés chacun par des coefficients numériques dépendants de cet indice.

L'intégration de l'équation $\Delta^n y=0$ s'effectuera d'ailleurs d'après ce qu'on a vu dans le n° 535. On aura

$$\Delta^{n-1}y=\Sigma 0=A'$$

$$\Delta^{n-2}y=\Sigma^2 0=\frac{A_1 x}{\Delta x}+A_1$$

$$\Delta^{n-3}y=\Sigma^3 0=\frac{A_1 x^2}{2(\Delta x)^2}-\frac{(A_1-2A_2)x}{2\Delta x}+A_3,$$

A_1, A_2, A_3, etc., étant des constantes arbitraires; et en général l'intégrale de l'ordre n sera

$$y=\alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots\ldots+\alpha_{n-1}x^{n-1},$$

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ étant des coefficients constants arbitraires, dont le nombre est égal à l'ordre de l'équation,

549. Considérons maintenant l'équation

$$y_{x+n}+Py_{x+n-1}+Qy_{x+n-2}+Ry_{x+n-3}+\ldots+Uy_x=0, \ldots(m)$$

dans laquelle P, Q, R, ... U désignent des nombres constants. Si nous posons $y=\rho^x$, ρ désignant une constante, tous les termes, après la substitution de cette valeur, seront divisibles par ρ^x, et il restera

$$\rho_n+P\rho^{n-1}+Q\rho^{n-2}+R\rho^{n-3}+\ldots\ldots+U=0, \qquad (n)$$

en sorte que l'expression $y=\rho^x$ satisfera à l'équation proposée (m), pourvu que ρ soit l'une quelconque des racines de l'équation (n).

En représentant donc par $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots\ldots \rho_n$ les n racines de l'équation (n), que nous supposons d'abord toutes réelles et inégales, nous aurons pour y les n valeurs particulières $y=\rho_1^x, y=\rho_2^x, y=\rho_3^x, \ldots\ldots y=\rho_n^x$; et puisque l'équation (n) serait également satisfaite par la somme de deux, ou d'un nombre quelconque de ces valeurs, affectées chacune de coefficients constants quelconques, l'on aura

$$y=A_1\rho_1^x+A_2\rho_2^x+A_3\rho_3^x+\ldots\ldots+A_n\rho_n^x$$

pour l'expression de l'intégrale générale de cette équation; $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ étant les n constantes arbitraires qui doivent entrer dans cette intégrale.

550. Dans le cas où l'équation (n) a des racines imaginaires, soit

$$\rho^2-2k\rho\cos.\varphi+k^2 \quad \text{et} \quad \rho=k(\cos.\varphi\pm\sqrt{-1}\sin.\varphi)$$

un des facteurs réels du second degré de son premier membre, et les deux racines imaginaires correspondantes. On reconnaîtra, par le n° 117, que l'équation (m) est satisfaite par les deux valeurs particulières

$$y=k^x(\cos.\varphi x+\sqrt{-1}\sin.\varphi x) \text{ et } y=k^x(\cos.\varphi x-\sqrt{-1}\sin.\varphi x),$$

et, par conséquent, par la somme de ces valeurs, multipliées chacune par un coefficient constant quelconque. D'où l'on conclut que la partie de l'expression générale de la fonction y correspondante aux deux racines imaginaires dont il s'agit est, sous forme réelle,

$$B_1k^x\cos.\varphi x+B_2k^x\sin.\varphi x,$$

B_1 et B_2 étant des constantes arbitraires.

551. Le cas où l'équation (n) a des racines égales se résout d'une manière semblable à ce qu'on a vu dans le nº 440. Si l'on représentait par ρ_1 et $\rho_1+\omega$ deux des racines de cette équation, la somme des valeurs particulières correspondantes serait

$$A_1\rho_1^x+A_2(\rho_1+\omega)^x;$$

ou, en développant la puissance indiquée,

$$(A_1+A_2)\rho_1^x+A_2\omega.x\rho_1^{x-1}+A_2\omega^2\frac{x(x-1)}{2}\rho_1^{x-2}+\text{etc.}$$

Or, on peut donner à A_1 et A_2 des valeurs telles que les quantités A_1+A_2 et $A_2\omega$ se réduisent à des constantes finies quelconques lorsque l'on supposera ω infiniment petite; ce qui réduit l'expression précédente à

$$B_1\rho_1^x+B_2x\rho_1^{x-1}.$$

Dans le cas de trois racines égales, la somme des trois valeurs particulières correspondantes sera

$$A_1\rho_1^x+A_2x\rho_1^{x-1}+A_3(\rho_1+\omega)^x,$$

ou

$$(A_1+A_3)\rho_1^x+(A_2+A_3\omega)x\rho_1^{x-1}+A_3\omega^2\frac{x(x-1)}{2}\rho^{x-2}+\text{etc.}$$

Et comme l'on peut attribuer aux constantes A_1, A_2, A_3 des valeurs telles que les quantités $A_1+A_3, A_2+A_3\omega, A_3\omega^2$ deviennent des constantes finies quelconques lorsque ω deviendra infiniment petite, la somme des trois valeurs particulières dont il s'agit prend la forme

$$B_1\rho_1^x+B_2x\rho_1^{x-1}+B_3\frac{x(x-1)}{2}\rho_1^{x-2}.$$

Et ainsi de suite dans le cas où il y aurait un plus grand nombre de racines égales entre elles.

552. Les constantes arbitraires introduites dans l'intégrale générale, se détermineront toujours d'après la condition que cette intégrale reproduise n valeurs données de la fonction y, correspondantes à n valeurs également données de la variable x.

XLI. Formules d'interpolation.

553. L'opération désignée sous le nom d'*interpolation* est une des applications principales du calcul des différences finies. Elle est fondée sur cette notion, qu'à défaut de l'expression analytique d'une fonction qui en fait connaître complétement la nature, et qui permet d'en calculer exactement, ou d'une manière aussi approchée qu'on le veut, la valeur correspondante à une valeur quelconque de la variable, on peut connaître, avec un degré d'exactitude qui suffit aux applications, toutes les valeurs de la fonction dont il s'agit lorsqu'on connaît un nombre limité de valeurs données de cette fonction. C'est ainsi que dans les constructions graphiques, on regarde la figure d'une courbe comme étant déterminée par un certain nombre de points donnés appartenant à cette courbe.

Reprenons la forme du n° 521

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots\ldots + \Delta^n u_0.$$

Cette formule établit simplement une relation entre la valeur u_n, la valeur u_0, et les différences $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots\ldots$ $\Delta^n u_0$; ou, ce qui revient au même, entre les valeurs

$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots . u_n$ qui sont censées connues. On ne peut, à parler rigoureusement, en tirer rien qui ne soit déjà donné.

Considérons u comme une fonction de la variable x seule, et admettons que cette variable croisse par la différence constante Δx. Si nous écrivons u_x pour représenter la valeur que reçoit la fonction u quand on donne à la variable une valeur désignée par x, nous devrons, en remplaçant dans la formule précédente u_n par u_x, remplacer n par $\frac{x}{\Delta x}$. Elle s'écrira

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x}\Delta u_0 + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$

$$+\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots+\Delta^{\frac{x}{\Delta x}}u_0.$$

554. Si la fonction u était une fonction rationnelle et entière de x de l'ordre r, la différence $\Delta^r u_0$ serait constante, et par conséquent les différences des ordres suivants seraient nulles, comme on l'a vu n° 527. L'expression précédente aurait donc un nombre déterminé de termes; en sorte que la connaissance des $r+1$ premières valeurs de u suffirait pour continuer indéfiniment la série, et donner des nombres exacts. Cela se voit aussi en remarquant que si l'on fait $\Delta^n u = 0$ dans l'équation du n° 523, on en tire

$$u_n = n.u_{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u_{n-3} - \ldots\ldots \mp u_0,$$

formule qui donne un terme quelconque de la suite u_0, u_1, u_2, etc., au moyen des n termes précédents. Cette circonstance n'a pas lieu en général; mais si les diffé-

rences successives $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0$, etc., ont des valeurs décroissantes, comme cela arrive dans les cas auxquels s'appliquent les méthodes dont il s'agit, on pourra supprimer les termes qui seront assez petits pour ne pas influer sur la valeur des résultats, eu égard au degré d'exactitude avec lequel les nombres sont calculés. La formule précédente pourra servir alors à prolonger la série; mais on conçoit qu'à mesure que l'on s'éloignera davantage des nombres donnés, on sera exposé à commettre des erreurs de plus en plus grandes.

Il importe de remarquer d'ailleurs que dans les cas où les différences d'un certain ordre r sont constantes, ou peuvent être supposées constantes, le calcul des termes de la suite u_0, u_1, u_2, etc., qui dépassent le terme u_r, n'exige plus que de simples additions. Soit par exemple la fonction

$$u_x = x^3 - 5x^2 + 6x - 1,$$

et supposons $x=1$. On calculera les quatre premiers ter mes, correspondants aux valeurs $x=0, x=1, x=2, x=3$, et l'on formera le tableau suivant

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
0	-1			
1	$+1$	$+2$		
2	-1	-2	-4	
3	-1	0	$+2$	$+6$

La nature de la fonction proposée, indiquant que les différences troisièmes sont constantes, on voit que l'on

pourrait continuer la série des valeurs de u_x par la formule

$$u_x = u_0 + x\Delta u_0 + x(x-1)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + x(x-1)(x-2)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3},$$

dans laquelle on ferait $u_0 = -1, \Delta u_0 = 2, \Delta^2 u_0 = -4, \Delta^3 u_0 = 6$. Mais il est beaucoup plus simple de prolonger le tableau en écrivant la différence constante 6 dans la dernière colonne à droite, et formant par addition les colonnes en revenant de droite à gauche.

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
3	−1	0	2	6
4	+7	8	8	6
5	29	22	14	6
6	71	42	20	6
etc.				

Les résultats que l'on obtient ici sont entièrement exacts. Mais il n'en serait pas de même si les différences du dernier ordre, que l'on considère, n'étaient pas rigoureusement constantes. Il faudrait alors calculer d'avance quelques termes éloignés de la série, et s'assurer que ces termes sont reproduits par le mode de calcul qui vient d'être indiqué.

555. L'objet de l'interpolation consiste d'ailleurs, non pas à prolonger indéfiniment une série de termes dont un certain nombre sont donnés, mais à calculer les termes intermédiaires dans une série dont un certain nombre de termes sont déterminés de distance en dis-

tance. Quoique la formule du n° 553 n'exprime, à proprement parler, que des relations entre les valeurs de u qui répondent aux valeurs déterminées $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, etc., de la variable x, on la regarde comme exprimant en fonction de x les valeurs de u, qui répondent à des valeurs quelconques de cette variable comprises entre les précédentes. Si l'on attribue à x une valeur moindre que Δx, l'expression de u_x sera dans la plupart des cas très-convergente, et donnera facilement une valeur fort approchée de cette quantité.

D'après ces notions, le calcul des tables, telles que les tables de logarithmes ou les tables astronomiques, peut être réduit à calculer exactement en premier lieu, au moyen de l'expression analytique des fonctions, un petit nombre de termes à intervalles éloignés ; et en second lieu, à former les termes intermédiaires par de simples additions. Nous avons supposé ci-dessus l'accroissement Δx constant. Admettons qu'entre deux quelconques des termes connus u_0, u_1, u_2, u_3, etc., qui répondent aux valeurs $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, etc., de la variable x, on veuille *interpoler* un nombre $m-1$ de termes distribués à intervalles égaux. Soit $\delta x = \frac{\Delta x}{m}$ le nouvel incrément de x. Il est évident, d'après ce que l'on a vu dans le n° précédent, que l'on formera facilement les termes intermédiaires demandés, si l'on connaît $u_0, \delta u_0, \delta^2 u_0, \delta^3 u_0$, etc., et si l'on peut supposer constantes les différences d'un certain ordre marquées par $\delta^i u_0$; puisque l'on aura alors la dernière colonne d'un tableau semblable à celui qui a été donné pour exemple, et les premiers termes de toutes les autres colonnes. Or, si l'on regarde, d'après

ce qui a été dit ci-dessus, la formule du nº 553, comme devant donner les valeurs de u correspondantes aux valeurs intermédiaires de x, cette formule donnera d'abord, en écrivant $m\delta x$ au lieu de Δx,

$$u_x = u_0 + \frac{x}{m\delta x}\Delta u_0 + \frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$
$$+\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3}+\text{etc.},$$

expression dans laquelle $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0$, etc., doivent être regardées comme des quantités constantes, et connues par le calcul préliminaire qui a été fait des termes de la suite qui répondent aux valeurs $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, etc. En différentiant ensuite par rapport au signe δ, et remarquant que les produits

$$\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\ldots$$

formant une fonction rationnelle et entière de x, leurs différences des ordres inférieurs à l'ordre marqué par le nombre des facteurs sont nulles, on trouvera

$$\delta^r u_x =$$
$$\left[\begin{array}{l}\delta^r\left\{\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{m\delta x}-(r-1)\right)\right\}.\frac{\Delta^r u_0}{1.2.3\ldots r}\\ +\delta^r\left\{\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{m\delta x}-r\right)\right\}.\frac{\Delta^{r+1} u_0}{1.2.3\ldots(r+1)}\\ +\delta^r\left\{\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{m\delta x}-(r+1)\right)\right\}.\frac{\Delta^{r+2} u_0}{1.2.3\ldots(r+2)}\\ +\text{etc.}\end{array}\right]$$

Cette expression donnera les différences cherchées $\delta u_0, \delta^2 u_0, \delta^3 u_0$, en y faisant $x=0$ après que les différen-

tiations indiquées auront été effectuées. Les formules dont il s'agit pouvant être employées utilement dans les applications, nous donnerons les expressions des différences des premiers ordres.

En développant les produits indiqués, on trouve facilement en premier lieu

$$\delta u_x = \left[\begin{array}{l} \delta \dfrac{x}{m\delta x}\Delta u_0 \\ +\delta\left(\dfrac{x^2}{m^2(\delta x)^2} - \dfrac{x}{m\delta x}\right)\dfrac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\ +\delta\left(\dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} - 3\dfrac{x^2}{m^2(\delta x)^2} + 2\dfrac{x}{m\delta x}\right)\dfrac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\ +\delta\left(\dfrac{x^4}{m^4(\delta x)^4} - 6\dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} + 11\dfrac{x^2}{m^2(\delta x)^2} - 6\dfrac{x}{m\delta x}\right)\dfrac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \end{array}\right]$$

$$\delta^2 u_x = \left[\begin{array}{l} \delta^2 \dfrac{x^2}{m^2(\delta x)^2}\dfrac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\ +\delta^2\left(\dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} - 3\dfrac{x^2}{m^2(\delta x)^2}\right)\dfrac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\ +\delta^2\left(\dfrac{x^4}{m^4(\delta x)^4} - 6\dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} + 11\dfrac{x^2}{m^2(\delta x)^2}\right)\dfrac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \end{array}\right]$$

$$\delta^3 u_x = \left[\begin{array}{l} \delta^3 \dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3}\dfrac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\ +\delta^3\left(\dfrac{x^4}{m^4(\delta x)^4} - 6\dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3}\right)\dfrac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \end{array}\right]$$

$$\delta^4 u_x = \delta^4 \frac{x^4}{m^4(\delta x)^4}\frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4}$$

etc.....

En employant ensuite l'expression de $\Delta^n x^i$ du n° 527, dans laquelle il faudra faire $x=0$, ce qui la réduit à son dernier terme, ces formules deviennent

$$\delta u_o = \frac{1}{m}\left[\Delta u_o + \frac{1-m}{2.m}\Delta^2 u_o + \frac{1-3m+2m^2}{2.3.m^2}\Delta^3 u_o + \frac{1-6m+11m^2-6m^3}{2.3.4.m^3}\Delta^4 u_o + \text{etc.}\right]$$

$$\delta^2 u_o = \frac{1}{m^2}\left[\Delta^2 u_o + \frac{1-m}{m}\Delta^3 u_o + \frac{7-18m+11m^2}{3.4.m^2}\Delta^4 u_o + \text{etc.}\right]$$

$$\delta^3 u_o = \frac{1}{m^3}\left[\Delta^3 u_o + \frac{3-3m}{2.m}\Delta^4 u_o + \text{etc.}\right]$$

$$\delta^4 u_o = \frac{1}{m^4}\left[\Delta^4 u_o + \text{etc.}\right]$$

etc.....

Il est rare que l'on soit dans le cas d'employer des différences d'un ordre plus élevé que le quatrième. On voit d'ailleurs que si l'on s'arrête aux différences de l'ordre r des nombres u_0, u_1, u_2, etc., de la série proposée, c'est-à-dire si l'on regarde la différence $\Delta^r u_x$ comme étant constante, il en résulte la conséquence que la différence du même ordre $\delta^r u_x$ des nombres qu'il s'agit d'interpoler entre les précédents est également constante et égale à $\frac{\Delta^r u_x}{m^r}$, $m-1$ étant le nombre des termes insérés entre deux termes consécutifs de la suite proposée. Les résultats précédents donneront toujours les moyens d'interpoler une suite de nombres placés à intervalles égaux entre les termes d'une suite donnée qui sont également placés à intervalles égaux.

556. Pour donner un exemple de l'usage de ces procédés, on déterminera les valeurs de la fonction

$$u_x = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$$

considérée nº 554, qui répondent aux valeurs de x, croissant par dixièmes de l'unité. Nous avons donc ici

$$u_0 = -1$$
$$\Delta u_0 = 2$$
$$\Delta^2 u_0 = -4$$
$$\Delta^3 u_0 = 6$$

et les différences des ordres supérieurs sont nulles. Mettant ces valeurs dans les formules précédentes, où l'on fera $m=10$, il viendra

$$\delta u_0 = \frac{1}{10}\left[\ 2 + \frac{-9}{20}(-4) + \frac{1-30+200}{600}\,6\right] = 0{,}551$$

$$\delta^2 u_0 = \frac{1}{100}\left[-4 + \frac{-9}{10}\,6\right] = -0{,}094$$

$$\delta^3 u_0 = \frac{1}{1000}\,6 = 0{,}006.$$

Ainsi, le calcul des valeurs intermédiaires demandées, s'opérera de la manière suivante :

x	u_x	δu_x	$\delta^2 u_x$	$\delta^3 u_x$
0	−1,000			
0,1	−0,449	0,551		
0,2	+0,008	0,457	−0,094	
0,3	0,377	0,369	−0,088	0,006
0,4	0,664	0,287	−0,082	6
0,5	0,875	0,211	−0,076	6
0,6	1,016	0,141	−0,070	6
0,7	1,093	0,077	−0,064	6
0,8	1,112	0,019	−0,058	6
0,9	1,079	−0,033	−0,052	6
1,0	1,000	−0,079	−0,046	6
1,1	0,881	−0,119	−0,040	6
etc.				

On peut voir, dans le *Précis* qui est au devant des

Tables de Logarithmes de Callet, page 64, les précautions qu'exigent les calculs de ce genre et la manière de corriger les petites erreurs auxquelles ils peuvent donner lieu lorsque les valeurs des différences ne sont qu'approchées.

557. L'usage des tables de logarithmes ou des autres tables du même genre, donne lieu à une application continuelle du procédé de l'interpolation. L'emploi des *parties proportionnelles* se déduit immédiatement du procédé qui vient d'être exposé en supposant les différences du second ordre nulles, et réduisant l'expression de u_x, écrite n° 554, à

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x} \Delta u_0.$$

Si les différences du second ordre ne sont pas nulles, on aura donc un résultat plus exact en employant les trois premiers termes

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x} \Delta u_0 + \frac{x(x-\Delta x)}{\Delta x^2} \frac{\Delta^2 u_0}{2}.$$

Cet usage des tables donne lieu aussi à la question inverse du problème de l'interpolation, c'est-à-dire à la recherche de la valeur de x, qui répond à la valeur donnée u_x de la fonction u. Quand on peut supposer nulles les différences des ordres supérieurs, la première des équations précédentes donne

$$x = \Delta x \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0}.$$

Si cette formule ne présentait pas l'exactitude nécessaire, il faudrait écrire

$$x = \Delta x \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right) \frac{\Delta^2 u_0}{1.2\Delta u_0} + \text{etc.}}$$

Après avoir calculé une première valeur approchée de x, au moyen de l'expression $\Delta x \frac{u_x - u_0}{\Delta u_0}$, on la substituerait dans le second membre pour obtenir un résultat plus exact. Cette seconde valeur de x pourrait être substituée de nouveau pour obtenir un résultat plus exact encore.

558. Nous avons supposé, dans le n° 554 et les suivants, que la variable x croissait par différences constantes, ou que les nombres de la suite proposée étaient distribués à intervalles égaux. On peut encore, dans les cas où cette condition n'aurait pas lieu, établir une formule d'interpolation analogue à l'expression de u_x du n° 554. Remarquons qu'en mettant dans cette expression pour $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0$, etc., les valeurs écrites n° 523, elle devient

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x}(u_1 - u_0) + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{1.2}$$
$$+ \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right)\frac{u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0}{1.2.3} + \text{etc.};$$

ou bien

$$u_x=$$

$$\left[\begin{array}{l}
u_0\left\{1-\frac{x}{\Delta x}+\frac{1}{1.2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)-\frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)+\text{etc.}\right\}\\
+u_1\left\{\quad\frac{x}{\Delta x}-\frac{1}{1.2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)+\frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta}-2\right)-\text{etc.}\right\}\\
+u_2\left\{\qquad\qquad\frac{1}{1.2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)-\frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)+\text{etc.}\right\}\\
+u_3\left\{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)-\qquad\right\}\\
+\text{etc.}
\end{array}\right]$$

En faisant $x=0$, cette équation se réduit à $u_x=u_0$; en faisant $x=\Delta x$, elle se réduit à $u_x=u_1$; en faisant $x=2\Delta x$, elle se réduit à $u_x=u_2$; en faisant $x=3\Delta x$, elle se réduit à $u_x=u_3$; et ainsi de suite. La nature de l'expression consiste donc en ce qu'elle est formée des termes successifs u_0, u_1, u_2, u_3, etc., ayant pour coefficients des fonctions rationnelles et entières de la variable x, qui ont la propriété de se réduire à l'unité quand on donne à x la valeur correspondante au terme auquel appartient la fonction, et de se réduire à zéro quand on donne à x une valeur correspondante à tout autre terme.

Représentons en général par x_0, x_1, x_2, x_3, etc., les valeurs de x qui, substituées dans la fonction u, donnent respectivement u_0, u_1, u_2, u_3, etc. De quelque manière que croissent ces valeurs de x, on formera évidemment une expression qui présentera la même propriété que la précédente, si l'on écrit :

$$u_x = \left[\begin{array}{l} u_0 \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots\ldots}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)\ldots\ldots\ldots} \\ + u_1 \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots\ldots}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots\ldots\ldots} \\ + u_2 \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots\ldots}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots\ldots\ldots} \\ + u_3 \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots\ldots\ldots}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ldots\ldots\ldots} \\ + \text{etc.}\ldots\ldots \end{array}\right]$$

Cette formule peut servir à calculer facilement, au moyen d'un certain nombre de valeurs données de la fonction u correspondante à des valeurs déterminées de x, une valeur quelconque intermédiaire entre celles-ci. On vérifie, d'ailleurs, qu'en supposant les valeurs x_0, x_1, x_2, x_3, etc., croissant en progression arithmétique, cette dernière formule revient à la précédente.

559. Un des principaux usages des méthodes d'interpolation consiste à établir des formules qui, étant déduites d'un certain nombre de résultats d'observation ou d'expérience, sont regardées comme exprimant, d'une manière approchée, la loi d'un phénomène. On doit remarquer que l'usage des formules de ce genre ne doit pas en général être étendu au delà des limites des résultats qui ont été obtenus. Si l'on regarde les nombres donnés par l'observation comme étant tout à fait exacts, et si les formules cherchées doivent y satisfaire, on peut employer les procédés qui viennent d'être exposés. On peut aussi tâcher de satisfaire à ces nombres par d'autres expressions plus appropriées à la nature du phénomène. Mais le plus souvent les résultats numériques sont affectés d'erreurs, et il ne conviendrait

pas de s'attacher à construire des formules qui s'accordassent exactement avec tous. On cherche alors à remplacer d'abord ces résultats par une suite régulière, ce qui peut se faire soit au moyen d'une construction graphique, soit en altérant les nombres de manière à rendre progressive la marche de leurs différences de divers ordres. Une semblable altération est toujours plus ou moins arbitraire, et devrait être dirigée d'après des principes qui dépendent de la théorie des probabilités.

Approximation des quadratures.

560. Les calculs numériques qu'il est nécessaire d'effectuer pour les rectifications, les quadratures, les cubatures, la détermination des centres de gravité, celle des centres d'inertie, etc., peuvent toujours être réduits à évaluer des intégrales définies telles que

$$\int_a^b dx.u$$

u désignant une fonction de x et a, b, les limites de l'intégrale. Lorsque cette évaluation ne peut être effectuée directement, on emploie divers procédés d'approximation dont les plus remarquables consistent à déduire la valeur de l'intégrale de la seule connaissance d'un certain nombre de valeurs de la fonction u.

Supposons toujours que la variable x varie par la différence constante Δx, et reprenons l'expression de u_x du n° 554,

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x}\Delta u_0 + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{x} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$
$$+ \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \text{etc.}$$

D'après la notion sur laquelle sont fondés les procédés de l'interpolation, nous regardons cette formule comme pouvant représenter les valeurs de la fonction u, non-seulement quand on y donne à x les valeurs $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, etc., mais pour une valeur quelconque de cette variable. En multipliant donc par dx, et intégrant entre les limites a et b, nous obtiendrons la valeur de l'intégrale proposée.

L'expression précédente revient à

$$\begin{aligned}
u_x = u_0 &+ \frac{x}{\Delta x}\Delta u_0 \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - \frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + 2\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 + 11\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - 6\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^5 - 10\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 + 35\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 - 50\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. + 24\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^5 u_0}{1.2.3.4.5} \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^6 - 15\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^5 + 85\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 - 225\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3\right. \\
&\qquad\qquad \left. + 274\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - 120\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^6 u_0}{1.2.3.4.5.6} \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Multipliant par dx, et intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=\Delta x$, il viendra

$$\int_0^{\Delta x} dx.u = \Delta x\left[u_0 + \frac{1}{2}\Delta u_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 u_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 u_0 - \frac{19}{720}\Delta^4 u_0 + \frac{3}{160}\Delta^5 u_0 - \frac{863}{60480}\Delta^6 u_0 + \text{etc.}\right]$$

pour l'expression de la valeur de la première partie de l'intégrale proposée comprise entre les limites 0 et Δx. La même formule donnera les expressions des parties suivantes de cette intégrale en écrivant u_1, u_2, u_3, etc., à la place de u. D'où l'on conclut évidemment

$$\int_0^{n\Delta x} dx.u = \Delta x \left[\begin{array}{l} u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} \\ + \frac{1}{2}(\Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta u_{n-1}) \\ - \frac{1}{12}(\Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta^2 u_{n-1}) \\ + \frac{1}{24}(\Delta^3 u_0 + \Delta^3 u_1 + \Delta^3 u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta^3 u_{n-1}) \\ - \text{etc.} \end{array}\right];$$

et en remarquant que

$$\begin{array}{l} \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots\ldots + \Delta u_{n-1} = u_n - u_0, \\ \Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 + \ldots\ldots + \Delta^2 u_{n-1} = \Delta u_n - \Delta u_0, \\ \Delta^3 u_0 + \Delta^3 u_1 + \Delta^3 u_2 + \ldots\ldots + \Delta^3 u_{n-1} = \Delta^2 u_n - \Delta^2 u_0, \\ \text{etc.}, \end{array}$$

on changera l'expression précédente en

$$\int_0^{n\Delta x} dx.u =$$

$$\Delta x \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} + \frac{1}{2} u_n \\ - \frac{1}{12}(\Delta u_n - \Delta u_0) + \frac{1}{24}(\Delta^2 u_n - \Delta^2 u_0) - \frac{19}{720}(\Delta^3 u_n - \Delta^3 u_0) \\ + \frac{3}{160}(\Delta^4 u_n - \Delta^4 u_0) - \frac{863}{60480}(\Delta^5 u_n - \Delta^5 u_0) + \text{etc} \end{array}\right]$$

Au moyen de cette formule on peut calculer la valeur de l'intégrale $\int dx.u$, entre des limites données, en par-

tageant l'intervalle de ces limites en un nombre n de parties égales chacune à Δx, et déterminant les valeurs $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ de la fonction u, qui répondent aux points de division. Une première valeur approchée est donnée par le premier terme seul

$$\Delta x . \left(\frac{1}{2} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \ldots \ldots + u_{n-1} + \frac{1}{2} u_n\right).$$

Les termes suivants sont la correction de cette valeur. Le résultat sera d'autant plus exact, que le nombre n étant plus grand, les différences qui composent les termes de correction sont plus petites.

561. La formule précédente ne pourrait être utilement employée qu'autant que les différences des ordres successifs décroîtraient très-rapidement. On peut en obtenir une autre qui donnera une approximation plus prompte. Reprenons l'expression de u_x du n° précédent, et après avoir multiplié par dx, intégrons depuis $x=0$ jusqu'à $x2=\Delta x$. Il viendra

$$\int_0^{2\Delta x} dx . u = \Delta x \Big[2u_0 + 2\Delta u_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 u_0 - \frac{1}{90}\Delta^4 u_0 + \frac{1}{90}\Delta^5 u_0 - \frac{37}{3780}\Delta^6 u_0 + \text{etc.} \Big],$$

ou, en faisant attention que, $\Delta u_0 = u_1 - u_0$, $\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0$,

$$\int_0^{2\Delta x} dx . u = \Delta x \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} u_0 + \frac{4}{3} u_1 + \frac{1}{3} u_2 \\ - \frac{1}{90}\Delta^4 u_0 + \frac{1}{90}\Delta^5 u_0 - \frac{37}{3780}\Delta^6 u_0 + \text{etc.} \end{array} \right]$$

pour l'expression d'une première partie de l'intégrale comprise entre les limites 0 et $2\Delta x$. En ajoutant les ex-

pressions analogues pour les parties suivantes comprises entre $2\Delta x$ et $4\Delta x$, $4\Delta x$ et $6\Delta x$, etc., on aura donc, n étant un nombre pair,

$$\int_0^{n\Delta x} dx.u =$$

$$\frac{\Delta x}{3}\left[\begin{array}{l} \quad u_0+4u_1+2u_2+4u_3+2u_4+4u_5+\ldots+2u_{n-2}+4u_{n-1}+u_n \\ -\frac{1}{30}(\Delta^4u_0+\Delta^4u_2+\Delta^4u_4+\ldots+\Delta^4u_{n-6}+\Delta^4u_{n-4}+\Delta^4u_{n-2}) \\ +\frac{1}{30}(\Delta^5u_0+\Delta^5u_2+\Delta^5u_4+\ldots+\Delta^5u_{n-6}+\Delta^5u_{n-4}+\Delta^5u_{n-2}) \\ -\frac{37}{1260}(\Delta^6u_0+\Delta^6u_2+\Delta^6u_4+\ldots+\Delta^6u_{n-6}+\Delta^6u_{n-4}+\Delta^6u_{n-2}) \\ +\text{etc.} \end{array}\right]$$

La première ligne est le résultat que l'on obtient en concevant dans l'intervalle compris entre 0 et $2\Delta x$, la courbe dont l'ordonnée est u, remplacée par un arc de parabole passant par les extrémités des trois ordonnées u_0, u_1, u_2; et de même pour les autres intervalles. Les termes suivants sont la correction de cette même première valeur, qui est déjà très-approchée.

On peut remarquer que l'usage des formules précédentes exige la connaissance des valeurs $u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}$, etc., de la fonction u, qui sont placées au delà des limites de l'intégrale définie. Si la fonction u est donnée dans toute son étendue, cette circonstance n'entraîne aucune difficulté. Mais il n'en serait pas de même si, comme cela arrive quelquefois, cette fonction n'était donnée que dans les limites de l'intégrale définie. Nous observerons à cet égard que l'esprit des méthodes d'interpolation consiste alors à regarder la fonction proposée comme entièrement définie par les valeurs particu-

lières $u_0 . u_1 , u_2 , \ldots , \ldots u_n$. La différence de l'ordre le plus élevé que l'on puisse calculer au moyen de ces valeurs, est $\Delta^n u_0$. On doit donc supposer cette différence constante, et déterminer en conséquence les termes qui entrent dans les formules dont il s'agit.

XLII. Lignes de niveau et de plus grande pente sur une surface.

562. Nous concevons les points d'une surface rapportés à trois coordonnées rectangulaires x,y,z. Les abscisses x,y sont horizontales ; l'ordonnée z est verticale. La figure de la surface est donnée par l'équation

$$z = f(x,y).$$

Admettons que les abscisses x,y reçoivent chacune des accroissements infiniment petits dx, dy ; l'ordonnée z prendra également un accroissement infiniment petit, représenté par

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy,$$

$\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ étant respectivement les coefficients différentiels de la fonction $f(x,y)$, pris par rapport à x et à y. La valeur de dz dépend du rapport que l'on a établi entre les variations arbitraires dx et dy. Si ce rapport est tel que $dz = 0$, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}},$$

on passera d'un point à un autre de la surface sans que

l'ordonnée z change de valeur. L'équation précédente est donc l'équation différentielle de la projection sur le plan des xy de la *ligne de niveau*, passant par le point de la surface, dont les coordonnées sont représentées par x,y,z.

On obtient l'équation en termes finis de cette projection en attribuant à z, dans l'équation $z=f(x,y)$, une valeur constante égale à l'ordonnée du point par lequel on veut faire passer la ligne de niveau.

563. En passant du point de la surface, dont les coordonnées sont x,y,z, au point dont les coordonnées sont $x+dx, y+dy, z+dz$, on parcourt, dans le plan horizontal des xy, un espacc $dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$; et on s'élève verticalement de l'espace dz. La *pente* de la ligne parcourue sur la surface, c'est-à-dire la différence de niveau de ses deux points extrêmes, divisée par sa projection horizontale, est donc exprimée par

$$\frac{\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy}{dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

La grandeur de cette pente variera avec le rapport arbitraire $\frac{dy}{dx}$. Si l'on veut connaître la direction de la plus grande pente, on égalera à zéro la différentielle de l'expression précédente, prise par rapport à $\frac{dy}{dx}$, ce qui donnera

$$\frac{dz}{dy}-\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dz}{dy}}{\frac{dz}{dx}}$$

pour l'équation différentielle de la projection horizontale de la *ligne de plus grande pente*. On voit que, pour un point quelconque de la surface, les projections horizontales des lignes de niveau et de plus grande pente qui se croisent en ce point, et par conséquent ces lignes elles-mêmes, sont toujours perpendiculaires l'une sur l'autre, résultat dont il est aisé de s'assurer directement.

564. La considération des lignes de niveau et de plus grande pente s'applique à la représentation graphique de la surface de la terre, au tracé des routes et à la conduite des eaux. On reconnaît que cette surface présente des pentes alternatives en sens opposés, sur lesquelles se trouvent des systèmes de lignes de plus grande pente, séparés par des lignes de moindre pente, désignées par les noms de *faîtes* et de *thalwegs*, qui sont autant d'asymptotes des lignes de plus grande pente ordinaires. Quand on parcourt une même ligne de niveau, les points où elle est coupée par les lignes de faîtes ou de thalwegs sont toujours ceux où la pente est un mininum. Il existe des points remarquables où les lignes de faîtes et de thalwegs se croisent à angles droits, et dans lesquels la hauteur verticale de la surface est un maximum ou un minimum absolu ou relatif. Les derniers de ces points indiquent les lieux où l'on doit diriger le tracé des routes ou des canaux lorsqu'il s'agit de franchir une chaîne de montagnes.

XLIII. De la courbure des surfaces.

565. La courbure d'une courbe est définie quand on détermine le rayon du cercle osculateur, c'est-à-dire du

cercle qui a un contact du second ordre avec cette courbe. La courbure d'une surface est également définie en assignant le rayon du cercle osculateur de toutes les sections normales qui peuvent être faites en un point donné.

Si, suivant la normale en un point quelconque m d'une surface, on fait passer un plan, on obtiendra une courbe qui sera une *section normale* de la surface. Prenons sur la normale, à partir du point m, une distance infiniment petite δ; puis, par le point ainsi déterminé, menons un plan perpendiculaire à la normale; nous obtiendrons une courbe que nous désignerons, avec M. Ch. Dupin, par le nom d'*indicatrice*, parce que la nature de cette courbe fait connaître, comme on le verra tout à l'heure, la figure de la surface près du point m. Si d'ailleurs nous représentons par σ l'arc infiniment petit compris entre le point m et le point où la section normale rencontre l'indicatrice, et si nous appelons ρ le rayon de courbure de cette section normale, nous aurons

$$\sigma = \rho . \text{arc.cos.} \left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right) = \rho \sqrt{\frac{2\delta}{\rho}},$$

et par conséquent

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\delta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (a)$$

Ainsi les rayons de courbure de diverses sections normales sont proportionnels aux quarrés des arcs σ de ces sections, comptés du point m jusqu'à la rencontre de l'indicatrice, ou, si l'on veut, aux quarrés des demi-diamètres de l'indicatrice, qui ne diffèrent des arcs qui leur correspondent, que d'une quantité infiniment petite du second ordre.

566. Cela posé, la situation du point m étant rapportée à trois axes rectangulaires par les coordonnées x, y, z, soit

$$z = f(x, y),$$

l'équation de la surface proposée. Représentons par $x+\alpha, y+6, z+\gamma$ les coordonnées du point de rencontre de la section normale et de l'indicatrice; en sorte que les quantités α et 6 étant très-petites, on pourra négliger leurs puissances et leurs produits par rapport aux puissances et aux produits d'un ordre inférieur. On aura, d'après la formule du n° 138,

$$\gamma = \frac{dz}{dx}\alpha + \frac{dz}{dy}6 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\alpha^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}\alpha 6 + \frac{d^2z}{dy^2}6^2\right);$$

expression que nous écrirons plus simplement

$$\gamma = p\alpha + q6 + \frac{1}{2}(r\alpha^2 + 2s\alpha 6 + t6^2), \dots\dots\dots\dots (b)$$

en représentant pour abréger par p et q les coefficients différentiels du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$; et par r, s, t les coefficients différentiels du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}$.
On peut regarder $\alpha, 6, \gamma$ comme des coordonnées comptées à partir du point m sur des axes parallèles aux axes des x, des y et des z. L'équation (b), dans une étendue très-petite autour de ce point, doit être regardée comme appartenant à la surface proposée.

De plus, l'équation du plan tangent mené par le point m à cette surface sera, d'après le n° 217,

$$\gamma = p\alpha + q6 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (c)$$

On en conclut que le plan de l'indicatrice, mené parallèlement au plan tangent à la distance δ, mesurée suivant la normale, ou à la distance $\delta\sqrt{p^2+q^2+1}$, mesurée suivant l'axe des z, aura pour équation

$$\gamma-\delta\sqrt{p^2+q^2+1}=p\alpha+q\beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

Enfin, si l'on élimine γ entre les équations (b) et (d), le résultat de cette élimination, qui est

$$2\delta\sqrt{p^2+q^2+1}=r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

sera évidemment l'équation de la projection de l'indicatrice sur le plan de $\alpha\beta$. On voit que la distance δ est infiniment petite du second ordre lorsque α et β sont infiniment petites du premier ordre.

567. Nous avons d'ailleurs

$$\sigma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

ou, en mettant pour γ sa valeur donnée par l'équation (b), et ne conservant que les quantités du second ordre par rapport à α et β,

$$\sigma^2=(1+p^2)\alpha^2+2pq\alpha\beta+(1+q^2)\beta^2.$$

Ainsi l'expression (a) du rayon de courbure devient, en mettant pour σ^2 cette valeur, et pour 2δ la valeur qui se déduit de l'équation (e),

$$\rho=\sqrt{p^2+q^2+1}.\frac{(1+p^2)\alpha^2+2pq\alpha\beta+(1+q^2)\beta^2}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2} \ldots\ldots (g)$$

Cette formule donnera le rayon de courbure d'une section normale quelconque lorsqu'on aura fixé le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, c'est-à-dire la projection sur le plan des xy de la tangente menée au point m à cette section normale.

568. **D'une section normale à une autre, le rayon de courbure varie proportionnellement aux quarrés des demi-diamètres de l'indicatrice.** Cette ligne, dont la projection sur le plan des xy est donnée par l'équation (e) du second degré, est toujours disposée symétriquement par rapport au point m, et les valeurs maximum et minimum du rayon de courbure correspondront évidemment à ses diamètres rectangulaires. Pour les déterminer de la manière la plus simple, on remarquera qu'en différentiant les équations (d) et (e) auxquelles les coordonnées des points de l'indicatrice doivent toujours satisfaire, on a

$$d\gamma = p\,d\alpha + q\,d\beta,$$
$$0 = (r\alpha + s\beta)\,d\alpha + (s\alpha + t\beta)\,d\beta.$$

De plus si ρ, et par conséquent σ, doivent être un maximum ou un minimum, on a par l'équation (f)

$$0 = \alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma;$$

ou, à cause de la valeur précédente de $d\gamma$,

$$0 = (\alpha + p\gamma)\,d\alpha + (\beta + q\gamma)\,d\beta.$$

Donc

$$\frac{\alpha + p\gamma}{r\alpha + s\beta} = \frac{\beta + q\gamma}{s\alpha + t\beta} = \frac{\alpha(\alpha + p\gamma) + \beta(\beta + q\gamma)}{\alpha(r\alpha + s\beta) + \beta(s\alpha + t\beta)}.$$

Or, la dernière de ces trois quantités est précisément le second facteur de l'expression (g) du rayon de courbure ρ. Donc, si l'on représente par R la valeur maximum ou minimum de ce rayon, et si l'on fait pour abréger

$$Z = \frac{R}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

on pourra écrire

$$Z=\frac{\alpha+p\gamma}{r\alpha+s\beta} \quad \text{et} \quad Z=\frac{\beta+q\gamma}{s\alpha+t\beta},$$

ou bien

$$\left.\begin{array}{l} Z(r\alpha+s\beta)=(1+p^2)\alpha+pq\beta \\ Z(s\alpha+t\beta)=pq\alpha+(1+q^2)\beta \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (h)$$

Nous en déduirons d'abord en éliminant Z,

$$-[(1+p^2)s-pqr]\alpha^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\alpha\beta+[(1+q^2)s-pqt]\beta^2=0,$$

équation qui donne

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\left[\begin{array}{c}-[(1+q^2)r-(1+p^2)t] \\ \pm\sqrt{[(1+q^2)r-(1+p^2)t]^2+4[(1+p^2)s-pqr][(1+q^2)s-pqt]}\end{array}\right]}{2[(1+q^2)s-pqt]},$$

ce qui revient à

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\left[\begin{array}{c}-[1+q^2)r-(1+p^2)t] \\ \pm\sqrt{[(1+q^2)r-2pqs+(1+q^2)]^2-4(p^2+q^2+1)(rt-s^2)}\end{array}\right]}{2[(1+q^2)s-pqt]} \quad ,\ldots (i)$$

ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

Nous déduirons en second lieu des équations (h), par l'élimination de α et β,

$$(rt-s^2)Z^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]Z+p^2+q^2+1=0;$$

d'où, en se rappelant que $R=Z\sqrt{p^2+q^2+1}$,

$$R=\frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{2(rt-s^2)}\left[\begin{array}{c}(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t \\ \pm\sqrt{[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(p^2+q^2+1)(rt-s^2)}\end{array}\right] \ldots (k)$$

Les deux valeurs données par la formule (i) représentent les tangentes trigonométriques des angles formés avec l'axe des x par les projections sur le plan des xy

des axes rectangulaires de l'indicatrice ; ou des lignes d'intersection du plan tangent à la surface avec les plans normaux qui contiennent le plus grand et le plus petit rayon de courbure. Les deux valeurs données par la formule (k) appartiennent à ces rayons mêmes, qui sont appelés généralement *rayons de courbures principaux.*

Nous remarquerons que les formules (i) et (k) donnent toujours des valeurs réelles ; car on a identiquement

$$(1+p^2)^2\left\{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(p^2+q^2+1)(rt-s^2)\right\}=$$
$$\left\{(1+p^2)[(1+p^2)t-(1+q^2)r]+2pq[pqr-(1+p^2)s]\right\}^2$$
$$+4(p^2+q^2+1)[pqr-(1+p^2)s]^2.$$

569. La valeur du rayon de courbure d'une section normale quelconque s'exprime très-simplement en fonction des deux rayons de courbure principaux. Concevons en effet les positions des plans coordonnés, changées de manière que le plan des xy devienne parallèle au plan tangent mené à la surface proposée au point m. On aura donc pour ce point $p=0, q=0$, et l'équation (e), appartenant à l'indicatrice, se réduira à

$$2\delta = r\alpha^2 + 2s\alpha6 + t6^2.$$

Si de plus les axes des x et des y étaient placés de manière à coïncider avec les axes rectangulaires de l'indicatrice, on voit par cette équation que l'on aurait $s=0$. Ainsi, en faisant $p=0, q=0$ et $s=0$, on exprime les conditions nécessaires pour que les plans des xz et des yz coïncident avec les plans des sections normales auxquelles appartiennent les deux rayons de courbure principaux. Dans ce cas, l'expression (g) du rayon de courbure d'une section normale quelconque, se réduit à

$$\rho = \frac{\alpha^2+6^2}{r\alpha^2+t6^2};$$

et en représentant par φ l'angle formé par le plan de cette section normale avec le plan des xz, elle prendra la forme

$$\rho = \frac{1}{r\cos.^2\varphi + t\sin.^2\varphi}.$$

Nous remarquerons d'abord que cette expression donne

$$\frac{1}{\rho} = (r\cos.^2\varphi + t\sin.^2\varphi),$$

et que si l'on appelait ρ_1 le rayon de courbure appartenant à la section normale, dont le plan est perpendiculaire à celui de la section à laquelle appartient le rayon ρ, on aurait

$$\frac{1}{\rho_1} = (r\sin.^2\varphi + t\cos.^2\varphi).$$

Donc

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = r + t,$$

équation très-remarquable, d'où l'on conclut que la somme des inverses des rayons de courbure appartenant à deux sections normales quelconques rectangulaires est constante. Ainsi l'on a toujours

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}.$$

R et R_1 représentant les rayons de courbure principaux.

D'ailleurs, l'équation qui a donné, dans le n° 568, l'expression (k) des rayons de courbure principaux, indique que l'on a en général

$$R + R_1 = \sqrt{p^2+q^2+1}\,\frac{(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2},$$

$$RR_1 = \frac{(p^2+q^2+1)^2}{rt - s^2};$$

et par conséquent

$$\frac{R+R_{,}}{RR_{,}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_{,}}=\frac{(1+q^{2})r-2pqs+(1+p^{2})t}{(p^{2}+q^{2}+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

570. Si maintenant on fait successivement $\varphi=0$ et $\varphi=\frac{\pi}{2}$ dans l'expression $\rho=\frac{1}{r\cos^{2}\varphi+t\sin.^{2}\varphi}$ du n° précédent, elle donnera

$$R=\frac{1}{r}\quad\text{et}\quad R_{,}=\frac{1}{t}$$

pour les valeurs des rayons de courbure principaux appartenant respectivement aux sections normales qui coïncident avec les plans des xz et des yz. D'où il suit que l'expression de ρ, du n° 568, peut être remplacée par la suivante :

$$\rho=\frac{RR_{,}}{R_{,}\cos.^{2}\varphi+R\sin.^{2}\varphi},\quad\text{ou}\quad\rho=\frac{2RR_{,}}{R+R_{,}-(R-R_{,})\cos.^{2}\varphi}.$$

On connaît ainsi la valeur du rayon de courbure d'une section normale quelconque en fonction des deux rayons de courbure principaux, et de l'angle φ formé par cette section normale avec celle qui contient le rayon R.

Il résulte de ce qui précède que deux surfaces qui se touchent en un point donné, si elles ont les mêmes rayons de courbure principaux, ont en ce point dans tous les sens un contact du second ordre, c'est-à-dire que toutes les sections normales faites dans ces deux surfaces ont respectivement des rayons de courbure égaux. On voit aussi que, dans une étendue infiniment petite autour d'un point quelconque m d'une surface, on peut concevoir cette surface comme pouvant être décrite de deux manières par la révolution d'un arc de

cercle, savoir : 1° par la révolution du plus grand cercle osculateur tournant autour d'un axe tracé dans son plan perpendiculairement à la normale, et passant par le centre du plus petit cercle osculateur; 2° par la révolution du plus petit cercle osculateur tournant autour d'un axe tracé dans son plan perpendiculairement à la normale, et passant par le centre du plus grand cercle osculateur. En effet, les deux surfaces ainsi décrites, ont évidemment les deux mêmes rayons de courbure principaux que la surface proposée.

571. Considérons maintenant (fig. 55) une section faite obliquement dans la surface par un plan mené par la tangente *mh* de la section normale *nmn'*, à laquelle appartient le rayon de courbure ρ. Soit *omo'* l'intersection de ce plan oblique avec la surface, et *oo'* l'intersection de ce même plan avec le plan de l'indicatrice. Désignons par ω l'angle formé par la normale *mf* avec la perpendiculaire *mg*, menée dans le plan oblique à la tangente *mh*. Si l'on demande la valeur du rayon de courbure de la section oblique *omo'*, on remarquera que la différence des lignes *nf* et *og*, ou celle des arcs *mn* et *mo*, est du même ordre que la distance *mf*, c'est-à-dire infiniment petite par rapport à ces arcs eux-mêmes. On peut donc prendre *mn* pour la longueur de l'arc *mo*. Ainsi le rayon de courbure de la section oblique *omo'* étant d'après le n° 565

$$\frac{\overline{mo}^2}{2.mg},$$

on peut écrire, au lieu de cette expression,

$$\frac{\overline{mn}^2}{2.\frac{mf}{\cos.\omega}}=\rho\cos.\omega=\frac{RR_{\prime}\cos.\omega}{R_{\prime}\cos.^2\varphi+R\sin.^2\varphi}.$$

Cette formule donne, d'une manière très-simple, le rayon de courbure d'une section oblique quelconque, faite dans une surface, en fonction des deux rayons de courbure principaux ; de l'angle φ formé par la tangente de la section oblique avec le plan de la section qui contient le rayon ρ; et de l'angle ω compris entre le plan de la section oblique et la normale à la surface.

Des lignes de courbure.

572. Les sections normales correspondantes aux axes rectangulaires de l'indicatrice, auxquelles appartiennent les rayons de courbure principaux, présentent une propriété très-remarquable. Soit (fig. 56) *non* l'indicatrice, *m* le centre de cette courbe, et *nn* la trace d'une section normale quelconque. Si l'on voulait mener par le point *n* une normale à la surface, cette ligne devrait être perpendiculaire en même temps à la section normale projetée en *nn*, et à la tangente *ni* menée à l'indicatrice au point *n*. La projection de cette normale sur le plan de l'indicatrice serait donc la ligne *nk* perpendiculaire à *ni*, et par conséquent la normale dont il s'agit ne rencontrera pas en général la normale à la surface menée par le point *m*. Mais les deux normales se rencontreront si la trace *nn* coïncide avec l'un ou l'autre des axes rectangulaires NN,N'N', de l'indicatrice. Ainsi, en chaque point d'une surface, les sections normales auxquelles appartiennent les rayons de courbure principaux se distinguent de toutes les autres par une propriété caractéristique, qui consiste en ce que la normale à la surface, pour le point dont il s'agit, rencontre la normale pour un point infiniment

voisin, pris sur l'une ou sur l'autre de ces deux sections. Le point de rencontre de ces deux normales est évidemment le centre de courbure de la section.

L'existence de cette propriété peut être vérifiée immédiatement de la manière suivante. Considérons la normale menée à la surface au point m, et soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne. Ses équations seront, d'après le n° 217,

$$x-x'+p(z-z')=0,$$
$$y-y'+q(z-z')=0;$$

et si on les différentie par rapport à x, y, z, en y regardant $x', y' z'$, comme des constantes, les équations obtenues de cette manière appartiendront à une ligne infiniment voisine qui satisfera aux deux conditions d'être normale à la surface, et d'avoir avec la première normale un point commun. Cette différentiation donne

$$dx+dp(z-z')+pdz=0,$$
$$dy+dq(z-z')+qdz=0;$$

ou, en faisant attention que $dz=pdx+qdy, dp=rdx+sdy, dq=sdx+tdy$,

$$(1+p^2)dx+pqdy+(rdx+sdy)(z-z')=0,$$
$$pqdx+(1+q^2)dy+(sdx+tdy)(z-z')=0.$$

En éliminant maintenant $z-z'$ entre ces deux dernières équations, ce qui donne

$$\left[(1+q^2)s-pqt\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[(1+q^2)r-(1+p^2)t\right]\frac{dy}{dx}-\left[(1+p^2)s-pqr\right]$$
$$=0,$$

on obtient une équation à laquelle doit satisfaire la valeur de $\frac{dy}{dx}$ appartenant à la projection horizontale de la courbe suivant laquelle il faut se déplacer sur cette surface pour satisfaire à la condition que deux normales infiniment voisines soient comprises dans un même plan. Or, cette équation est précisément celle qui donne les deux valeurs du rapport $\frac{6}{\alpha}$ auxquelles correspondent les rayons de courbure principaux. On reconnaît d'ailleurs immédiatement que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ données par cette équation appartiennent respectivement à deux lignes qui se coupent à angles droits, lorsqu'on suppose, comme dans le n° 569, la position des plans coordonnés changée de manière que le plan des yx devienne parallèle au plan qui touche la surface au point m. On a alors $p=0, q=0$, et l'équation précédente se réduit à

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{r-t}{s}\left(\frac{dy}{dx}\right)-1=0:$$

les deux racines donneraient donc les tangentes trigonométriques de deux angles suppléments l'un de l'autre, c'est-à-dire que les directions des courbes auxquelles elles appartiendraient seraient perpendiculaires entre elles.

Si l'on élimine maintenant $\frac{dy}{dx}$ entre les deux équations qui ont été trouvées ci-dessus, on aura

$$(rt-s^2)(z-z')^2+[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t](z-z')+1+p^2+q^2=0.$$

Cette équation, réunie aux deux équations de la nor-

male, donnera les coordonnées x',y',z' du point de rencontre des deux normales consécutives, c'est-à-dire du centre de courbure. Comme elle est du second degré, chacune de ces coordonnées aura en général deux valeurs, en sorte qu'il y aura sur la même normale deux centres de courbure appartenant respectivement aux sections rectangulaires déterminées par l'équation précédente. Quant à la grandeur du rayon de courbure, si on la désigne comme ci-dessus par R, on a évidemment

$$z'-z=\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

L'équation que l'on vient d'obtenir s'accorde donc avec celle qui a été trouvée n° 568, et dont on a déduit l'expression (*k*) des rayons de courbure principaux de la surface.

573. On voit, par ce qui précède, qu'après s'être placé en un point quelconque d'une surface, on peut toujours passer de ce point à un point voisin suivant deux directions qui forment entre elles un angle droit, avec la condition que les normales menées à la surface par les deux points seront comprises dans le même plan, et se rencontreront. Après s'être ainsi transporté dans un second point on peut passer à un troisième, puis à un quatrième, et ainsi de suite, en s'assujettissant toujours à la même condition. On tracera de cette manière sur la surface une ligne continue, que l'on a nommée *ligne de courbure*, et dont la considération est importante. Il existe toujours, pour chaque point d'une surface, deux lignes de courbure, qui se coupent à angles droits dans ce point. En concevant toutes ces lignes tracées sur

la surface, on voit qu'elles la divisent en deux systèmes de zônes, dont le croisement forme des figures rectangulaires. Les deux lignes de courbure qui se coupent en chaque point, correspondent aux sections normales de plus grande et de plus petite courbure, c'est-à-dire aux *sections normales principales*.

L'équation

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+q^2)t]\frac{dy}{dx}-\left[(1+p^2)s-pqr\right]$$

$$=0$$

qui a été obtenue précédemment, est l'équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy. Comme celle du second degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$, son intégrale contiendra une constante arbitraire élevée au quarré; et si l'on veut déterminer cette constante de manière à faire passer la ligne de courbure par un point donné de la surface, on trouvera deux valeurs qui appartiendront respectivement aux lignes de courbure de chaque système.

En éliminant r et t au moyen des relations $dp=rdx+sdy$, $dq=sdx+tdy$, et en se rappelant que $dz=pdx+qdy$, cette équation prend la forme

$$dp(dy+qdz)=dq(dx+qdz)$$

qui doit être remarquée.

574. L'examen des diverses figures que peut affecter la courbe appelée indicatrice est très-propre à faire juger des modifications que présente la courbure des surfaces. L'équation (*b*) du n° 566, dans laquelle on n'a conservé que les termes du second ordre en α et 6,

$$\gamma=p\alpha+q6+\frac{1}{2}(r\alpha^2+2s\alpha6+t6^2),$$

appartient à une surface du second degré ; d'où l'on conclut qu'une telle surface peut en général avoir dans toutes les directions autour d'un point quelconque une osculation du second ordre avec la surface proposée. La surface proposée et la surface du second degré osculatrice doivent être regardées comme se confondant l'une avec l'autre dans une étendue infiniment petite autour du point m, et l'indicatrice comme appartenant à l'une et à l'autre. L'équation (e) de la projection de l'indicatrice sur un plan parallèle au plan des xy a été donnée n° 566 : nous l'écrirons simplement

$$D=r\alpha^2+2s\alpha\mathfrak{6}+t\mathfrak{6}^2,$$

en faisant pour abréger $D=2\delta\sqrt{p^2+q^2+1}$; cette équation résolue par rapport à $\mathfrak{6}$ donne

$$\mathfrak{6}=\frac{-s\alpha\pm\sqrt{Dt-(rt-s^2)\alpha^2}}{t}.$$

575. Si la fonction $rt-s^2$ est positive, l'indicatrice est une ellipse, et la surface osculatrice du second degré est un ellipsoïde. Tous les diamètres de l'ellipse étant réels, les quarrés de ces diamètres, auxquels les rayons de courbure des sections normales sont proportionnels, sont tous positifs. Toutes les sections normales ont leurs courbures tournées dans le même sens. Le même résultat se conclut de l'expression (k) du n° 568.

576. Si la fonction $rt-s^2$ est négative, l'indicatrice est une hyperbole, et la surface osculatrice du second degré est un hyperboloïde. Les diamètres de l'indicatrice, ayant leurs quarrés positifs, tandis que les diamètres imaginaires ont leurs quarrés négatifs, les deux

courbures principales de la surface sont tournées en sens contraires ; et en général, parmi les diverses sections normales, les unes ont leur courbure tournée dans un sens, les autres dans le sens opposé. Les asymptotes de l'hyperbole, dans la direction desquelles la courbure est nulle, séparent les sections normales qui ont respectivement leur courbure tournée dans un sens ou dans l'autre.

On obtiendra la direction de ces asymptotes en égalant à zéro le dénominateur de l'expression (g) du n° 567, ce qui donne

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2=0.$$

Ainsi l'équation différentielle

$$r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

appartient à la projection sur le plan des xy des courbes tracées sur la surface proposée dans le sens desquelles la courbure est nulle, ou le rayon de courbure infini.

L'équation différentielle

$$dz=pdx+qdy$$

appartient également au plan tangent à la surface au point m, et à la surface elle-même ; on en déduit

$$d^2z=dp.dx+dq.dy, \quad \text{ou} \quad d^2z=rdx^2+2sdydx+tdy^2.$$

Mais on a pour le plan tangent $d^2z=0$: donc en écrivant

$$rdx^2+2sdydx+tdy^2=0,$$

on établit entre dx et dy une relation qui appartient à la ligne d'intersection de la surface proposée et de son plan tangent. Ainsi dans les surfaces du genre de celles

dont il s'agit, c'est-à-dire lorsque les deux courbures principales sont dirigées en sens contraires, la surface est coupée par son plan tangent suivant deux lignes dont les directions coïncident avec les asymptotes de l'indicatrice.

L'angle compris entre ses asymptotes peut faire juger du rapport des deux courbures. En effet, le rapport des deux axes de l'hyperbole étant exprimé par la tangente trigonométrique de cet angle, le rapport des rayons de courbure principaux le sera par le quarré de cette tangente trigonométrique.

577. Si la fonction $rt-s^2$ a une valeur nulle, l'expression de 6 du n° 574 se réduit à

$$6=\frac{-s\alpha\pm\sqrt{Dt}}{t}$$

et représente le système de deux lignes droites, formant avec l'axe des x un angle dont la tangente trigométrique est $-\frac{s}{t}$. L'indicatrice est donc formée ici de deux lignes droites parallèles, et la surface osculatrice du second degré est une surface cylindrique. Tous les diamètres de l'indicatrice étant réels, la surface a toutes ses courbures dirigées dans le même sens ; mais la courbure est nulle dans le sens des lignes droites dont il s'agit. En effet, en supposant $rt-s^2=0$ dans l'expression (k) du n° 568, qui donne les valeurs des rayons de courbure principaux, on voit que l'une des racines de cette équation est alors finie, l'autre infinie, et qu'elles sont de même signe. La propriété d'avoir un contact du second ordre avec une surface cylindrique, appartient

aux surfaces appelées *développables*, et les caractérise. L'équation aux différences partielles du second ordre

$$rt-s^2=0,$$

qui exprime cette propriété, convient à toutes les surfaces de ce genre.

578. Les deux valeurs de R données par l'expression (*k*) du n° 568 seront égales et de même signe si l'on a

$$[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)=0.$$

Cette dernière équation exprime donc la condition nécessaire pour que les deux rayons de courbure principaux soient égaux entre eux et dirigés dans le même sens. L'expression de ρ du n° 570 montre que dans ce cas les rayons de courbure de toutes les sections normales sont égaux entre eux. Les points d'une surface où cette circonstance se présente, et dans lesquels l'indicatrice est un cercle, sont ordinairement très-remarquables : on leur a donné le nom d'*ombilics*. Il importe d'observer que d'après la remarque qui a été faite à la fin du n° 568, l'équation précédente ne peut pas subsister à moins que l'on n'ait séparément les deux équations

$$(1+q^2)r-(1+p^2)t=0,$$
$$(1+p^2)s-pqr=0,$$

lesquelles entraînent la suivante

$$(1+q^2)s-pqt=0.$$

On peut se convaincre d'ailleurs que l'égalité des deux rayons de courbure principaux entraîne toujours l'existence de la double équation

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t},$$

en remarquant que la formule du n° 570 prouvant que les

rayons de courbure de toutes les sections normales sont alors égaux entre eux, il est nécessaire que le rapport $\frac{6}{\alpha}$ disparaisse dans l'expression (g) du n° 567, ce qui ne pourrait avoir lieu si cette double équation n'existait point.

Cette double équation rendant identique l'équation du n° 568 dont dépend l'expression de $\frac{6}{\alpha}$, ou (ce qui est la même chose), l'équation du n° 572, dont dépend l'expression de $\frac{dy}{dx}$ qui convient aux directions des lignes de courbure principales, on ne peut plus rien conclure relativement à ces directions. Il existe des ombilics où il ne passe qu'une seule ligne de courbure principale, d'autres où il en passe un nombre fini plus grand que deux, d'autres enfin où un nombre infini de lignes de courbure se croisent dans toutes les directions. Les sommets ou pôles des surfaces de révolution sont dans ce dernier cas. La distinction des divers cas qui se présentent peut se déduire de l'équation même

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}-\left[(1+p^2)s-pqr\right]=0$$

dont il s'agit, en la différentiant successivement par rapport à x et y, $\frac{dy}{dx}$ étant regardé comme constant. On obtient ainsi des équations du troisième, quatrième, etc. degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$, qui donneront les valeurs propres à mettre en évidence les véritables directions des lignes de courbure.

La surface sphérique est la seule pour tous les points de laquelle on ait la relation

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}.$$

579. Les deux valeurs de R données par la formule (k) du n° 568, seront égales et de signes contraires si l'on a

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Dans ce cas les deux courbures principales sont égales et dirigées en sens opposés. L'indicatrice est une hyperbole équilatère. Les sections normales, placées symétriquement par rapport aux axes ou aux asymptotes de cette hyperbole, présentent des courbures égales entre elles. Les lignes dans le sens desquelles la courbure est nulle, se croisent à angles droits comme les lignes de courbure principales. L'équation précédente ne diffère point d'ailleurs de celle qui a été trouvée n° 517, pour l'expression de la condition que l'aire de la surface comprise dans un contour quelconque soit un minimum. Ainsi les surfaces qui satisfont à cette condition ont la propriété d'avoir dans tous leurs points leurs deux rayons de courbure principaux égaux et dirigés en sens contraires, proposition qui ne peut être démontrée directement.

De la surface lieu des centres de courbure.

580. Un point m étant pris sur une surface donnée, concevons les deux lignes de courbure qui se croisent en ce point, et le plan normal qui est dirigé dans le sens de l'une des lignes de courbure. Si l'on admet que ce plan se meut dans l'espace sans cesser d'être normal

à la surface proposée, et tangent à la ligne de courbure dont il s'agit, l'espace qu'il décrira aura pour enveloppe une surface développable, coupant à angles droits la surface proposée. Cette surface développable sera le lieu de toutes les normales à la surface proposée, menées par la ligne de courbure, et ces normales en seront les caractéristiques. Les intersections des normales consécutives traceront sur la surface développable une de ces lignes remarquables que l'on a désignées sous le nom d'*arétes de rebroussement*. L'arête de rebroussement sera le lieu des centres de courbure correspondants aux différents points de la ligne de courbure, qui a servi de directrice au mouvement du plan normal.

En concevant également le plan normal à la surface au point m, qui est dirigé dans le sens de la seconde ligne de courbure, et admettant de même que ce plan se meut sans cesser d'être normal à la surface et tangent à cette ligne, on obtiendra une autre surface développable qui sera le lieu des normales à la surface proposée, menées par les points de la seconde ligne de courbure, et dont l'arête de rebroussement sera le lieu des centres de courbure correspondants à ces points.

On peut se représenter construites dans l'espace toutes les surfaces développables, appartenant au premier système de lignes de courbure de la surface proposée, et toutes les surfaces développables appartenant au second système de ces lignes de courbure. Les surfaces développables du premier système couperont partout à angles droits celles du second. Les deux systèmes de surfaces dont il s'agit, partageront l'espace en parties rectangulaires d'une longueur infinie, dans le sens des

normales à la surface proposée. La suite des arêtes de rebroussement des surfaces développables, appartenant au premier système, formera elle-même une autre surface, sur laquelle se trouveront tous les centres de l'une des courbures. La suite des arêtes de rebroussement des surfaces développables, appartenant au second système des lignes de courbure formera également une seconde surface, qui sera le lieu de tous les centres de l'autre courbure. Les surfaces lieu des centres de courbure sont, par rapport à la surface proposée, ce que la développée d'une courbe plane est par rapport à cette courbe.

581. Les équations des surfaces dont on vient de parler peuvent être obtenues comme il suit. Reprenons les équations de la normale du n° 572 :

$$\left.\begin{array}{l} x-x'+p(z-z')=0, \\ y-y'+q(z-z')=0; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

et les suivantes

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}-\left[(1+p^2)s-pqr\right]$$
$$=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(rt-s^2)(z-z')^2+[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t](z-z')+1+p^2+q^2$$
$$=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

qui en ont été déduites. L'équation (2) aux différences ordinaires entre les variables x et y appartient aux projections sur le plan des xy des lignes de courbure de la surface proposée. Cette équation du premier ordre et du second degré par rapport au coefficient $\frac{dy}{dx}$ étant intégrée, son intégrale sera complétée par une constante arbitraire qui s'y trouvera élevée au second degré. En déterminant donc cette constante de manière à faire

passer une ligne de courbure par un point donné, on trouvera deux valeurs, correspondant respectivement aux deux lignes de courbure qui se croisent dans tous les points de la surface. Indiquons pour abréger par (2′) l'intégrale générale de l'équation (2) dont il s'agit. Il est visible qu'en éliminant x,y,z entre l'équation de la surface proposée, les équations (1) et l'équation (2′), l'équation restante en x',y',z', appartiendra aux surfaces développables normales qui coupent la surface suivant ses lignes de courbure. Elle donnera l'une quelconque de ces surfaces développables en y déterminant convenablement la constante arbitraire qui s'y trouve contenue.

582. L'équation (3) est une équation primitive en x,y,z et z'. Elle doit donner la valeur de z', appartenant au point d'intersection de deux normales consécutives, c'est-à-dire au centre de courbure. En éliminant x,y,z entre l'équation de la surface proposée, les équations (1) et l'équation (3), on aura donc en $x'y'$ et z' l'équation de la surface lieu des centres de courbure. Cette équation montera au second degré par rapport à z'. Si elle peut se décomposer en deux facteurs, on obtiendra, en les égalant séparément à zéro, les équations distinctes de deux surfaces qui contiendront respectivement les centres de l'une et de l'autre courbure de la surface proposée. Si cette décomposition n'a pas lieu, les centres des deux courbures se trouveront placés sur deux nappes appartenant à une surface unique.

Une normale quelconque à la surface proposée touche à la fois les deux nappes qui contiennent respectivement les centres de l'une et de l'autre courbure, et si l'on mène par cette normale deux plans tangents à ces deux nap-

pes, ces plans se couperont à angles droits. Donc les deux nappes de la surface lieu des centres de courbure sont toujours telles, qu'étant regardées d'un point quelconque, leurs contours apparents paraissent se croiser à angles droits. Ainsi une surface quelconque n'est pas propre à devenir le lieu des centres de courbure d'une autre surface; on peut prendre arbitrairement le lieu des centres de l'une des courbures; mais la surface qui contiendrait les centres de l'autre courbure doit être telle que son contour apparent paraisse toujours couper celui de la première à angles droits.

583. Lorsque la surface qui contient les centres de l'une des courbures coupe la surface qui contient les centres de l'autre courbure, les points d'intersection appartenant également à l'une et à l'autre courbure, répondent aux points de la surface proposée, pour lesquels les deux rayons de courbure principaux sont égaux entre eux, points qui sont déterminés par l'équation

$$[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)=0,$$

comme on l'a vu n° 578. Cette équation donne la projection sur le plan des xy de la ligne des *courbures sphériques* sur la surface proposée.

584. Chacune des arêtes de rebroussement des surfaces développables normales, dont la réunion forme les deux nappes de la surface lieu des centres de courbure est une ligne de plus courte distance sur cette dernière surface. En effet, le plan passant par deux normales consécutives, appartenant à l'une de ces surfaces développables normales, est en même temps le plan oscu-

lateur de l'arête de rebroussement au point d'intersection de ces deux normales, et perpendiculaire au même point à la nappe de la surface lieu des centres de courbure, sur laquelle cette arête de rebroussement est placée. Or, le caractère de la ligne de plus courte distance sur une surface quelconque consiste en ce que le plan osculateur de cette ligne soit en même temps normal à la surface.

Concevons un fil dont une extrémité est fixée sur un point de la ligne d'intersection des deux nappes qui contiennent respectivement les centres de l'une et l'autre courbure. En tendant ce fil, et le faisant mouvoir de manière qu'il soit en partie plié sur cette intersection, et que la portion libre soit dirigée dans le sens de la tangente, l'extrémité opposée décrira la ligne des courbures sphériques sur la surface proposée. Si l'on fait ensuite mouvoir le même fil de manière qu'il soit en partie plié sur l'intersection des deux nappes dont on vient de parler, et en partie sur l'une ou sur l'autre de ces nappes, l'extrémité pourra se transporter dans tous les points de la surface proposée, qui peut ainsi être décrite de deux manières différentes par le mouvement d'un fil plié sur la surface lieu des centres de courbure, comme l'est une courbe par le mouvement d'un fil plié sur sa développée.

Exemple de la détermination des lignes de courbure et des rayons de courbure.

585. Soit

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

l'équation de la surface proposée. Cette surface est un

paraboloïde dont l'axe des z est l'axe principal. Les sections faites parallèlement au plan des xy sont des ellipses ayant leurs axes dirigés dans le sens des x et dans le sens des y. La longueur des demi-axes de ces sections dans le sens des x est $\sqrt{2az}$, et la longueur des demi-axes dans le sens des y est $\sqrt{2bz}$. Nous supposerons ici $a>b$.

Nous aurons

$$\frac{dz}{dx}=p=\frac{x}{a}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2}=r=\frac{1}{a},$$
$$\frac{dz}{dy}=q=\frac{y}{b}, \qquad \frac{d^2z}{dxdy}=s=0,$$
$$\frac{d^2z}{dy^2}=t=\frac{1}{b};$$

et ces valeurs étant substituées dans l'équation des lignes de courbure

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}-\left[(1+p^2)s-pqr\right]=0,$$

qui a été trouvée n° 572, il viendra

$$-\frac{xy}{ab^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{1}{a}-\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{1}{b}\right]\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{a^2b}=0.$$

Cette équation, en posant pour abréger

$$A=\frac{a}{b}, \qquad B=a(a-b),$$

s'écrira

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-Ay^2+B)\frac{dy}{dx}-xy=0 \;\ldots\ldots\ldots(m)$$

elle appartient à la projection des lignes de courbure de la surface proposée sur le plan des xy.

Pour l'intégrer on la différentiera d'abord, ce qui donnera

$$\left(2Axy\frac{dy}{dx}+x^2-Ay^2+B\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0,$$

puis on éliminera B entre cette équation du second ordre et l'équation (m). La constante A disparaîtra également du résultat de l'élimination, et l'on trouvera

$$x\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]-y\frac{dy}{dx}=0.$$

Cette dernière équation étant multipliée par le facteur $\frac{dx}{x^2}$ devient

$$\frac{xd.y\frac{dy}{dx}-y\frac{dy}{dx}d.x}{y^2}=0,$$

dont le premier membre est la différentielle exacte de $\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$. On a donc en intégrant une première fois

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=\alpha, \quad \text{ou} \quad ydy=\alpha.xdx;$$

et en intégrant une seconde fois

$$y^2=\alpha x^2+\beta,$$

α et β étant deux constantes.

L'équation $y^2=\alpha x^2+\beta$ est l'intégrale générale de l'équation (m). Mais comme cette dernière n'est que du premier ordre, son intégrale ne doit contenir qu'une seule constante arbitraire. L'une des constantes α, β, est déterminée par la condition que l'équation $y^2=\alpha x^2+\beta$ satisfasse à l'équation (m). En substituant donc dans l'équation les valeurs

$$y=\pm\sqrt{\alpha x^2+6}\,,\qquad \frac{dy}{dx}=\pm\frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2+6}}\,,$$

on trouve pour condition

$$A\alpha 6-B\alpha+6=0\,,$$

d'où

$$6=\frac{B\alpha}{A\alpha+1},\quad \text{c'est-à-dire}\quad 6=\frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha+b}.$$

L'équation sous forme finie des lignes de courbure est par conséquent

$$y^2=\alpha x^2+\frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha+b},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n)$$

dans laquelle α est la constante arbitraire.

586. Si l'on veut déterminer la constante α de manière que l'équation (n) appartienne à une ligne de courbure, passant par un point donné de la surface proposée dont les abscisses seraient x' et y', on fera $x=x', y=y'$ dans cette équation, et on la résoudra par rapport à α, ce qui donnera

$$\alpha=-\frac{c}{2ax'^2}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2ax'^2}\right)^2+\frac{b}{a}\frac{y'^2}{x'^2}}\,,$$

en posant,

$$c=bx'^2-ay'^2+ab(a-b).$$

Ainsi l'on trouvera toujours, pour la constante α, deux valeurs réelles, l'une positive et l'autre négative; et ces valeurs étant substituées dans l'équation (n) donneront respectivement les équations des projections des deux lignes de courbure qui se croisent dans le point auquel appartiennent les abscisses x', y'.

La valeur positive de α donnera, pour les projections du premier système des lignes de courbure, des hyper-

bôles ayant leur axe réel dirigé dans le sens de l'axe des y, dont les équations seront

$$y^2 = \alpha x^2 + \frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha+b}.$$

La grandeur du demi-axe est $\sqrt{\frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha+b}}$. La plus petite valeur que puisse prendre ce demi-axe est 0, ce qui répond aux cas où l'on supposerait x' très-grande et y' très-petite : les deux branches de l'hyperbole se confondent alors avec l'axe des x. La plus grande valeur que puisse prendre ce demi-axe est $\sqrt{b(a-b)}$, ce qui répond au cas où la valeur positive de α serait infinie, parce que l'on aurait supposé x' très-petite et y' très-grande. L'hyperbole s'écarterait alors très-peu de l'axe des y. Si l'on porte donc sur l'axe des y de part et d'autre de l'origine une distance égale à $\sqrt{b(a-b)}$, on aura deux points, au delà desquels les sommets des hyperboles qui donnent le premier système des lignes de courbure ne pourront pas être placés.

La valeur négative de α donnera pour les projections du second système de courbure, des ellipses ayant leurs axes rectangulaires dirigés dans le sens de l'axe des x et de l'axe des y, et dont les équations seront

$$y^2 = -\alpha x^2 + \frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha-b}.$$

La grandeur du demi-axe, placé dans le sens de l'axe des x, est $\sqrt{\frac{ab(a-b)}{a\alpha-b}}$, et la grandeur du demi-axe, placé dans le sens de l'axe des y, est $\sqrt{\frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha-b}}$, en sorte

que le rapport de ces deux axes est égal à $\sqrt{\alpha}$. En supposant x' extrêmement grande, la valeur négative de α est à fort peu près égale à $\frac{b}{a}$, ce qui est la plus petite valeur absolue que l'on puisse attribuer à cette quantité. A mesure que x' diminue, la valeur absolue de α augmente, pourvu que la quantité c demeure positive, et, cette condition étant satisfaite, α deviendra infiniment grande quand x' sera supposée infiniment petite. Alors l'axe de l'ellipse, placé dans le sens des x, sera infiniment petit, et la moitié de l'axe, placé dans le sens des y, sera égale à $\sqrt{b(a-b)}$. Il n'est pas possible, d'ailleurs, de supposer à la fois x' assez petite et y' assez grande pour que la quantité c devenant négative, la valeur de α puisse devenir aussi petite qu'on le voudrait; car l'équation des lignes de courbure ne donne que des valeurs imaginaires quand α étant supposée négative, on attribue à cette constante une valeur absolue moindre que $\frac{b}{a}$. On voit que les points placés sur l'axe des y, à la distance $\sqrt{b(a-b)}$ de l'origine, forment ici une limite commune que les sommets des deux systèmes de lignes de courbure ne peuvent dépasser dans un sens ou dans l'autre.

Les axes des x et des y sont au nombre des lignes qui appartiennent aux projections des deux systèmes de lignes de courbure du paraboloïde.

587. L'équation générale de la projection de l'indicatrice

$$D = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$$

devient ici

$$D = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b}:$$

cette projection appartient toujours à une ellipse, ainsi que le comporte la nature de la surface proposée, dont les deux courbures sont dans toute son étendue dirigées dans le même sens.

Quant à la relation

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t},$$

qui, d'après le n° 578, doit subsister dans les ombilics, c'est-à-dire dans les points où tous les rayons de courbure sont égaux, elle devient

$$\frac{a^2+x^2}{a}=\frac{xy}{0}=\frac{b^2+y^2}{b}.$$

Cette relation ne peut être satisfaite qu'en supposant $x=0$ et $y=\sqrt{b(a-b)}$, c'est-à-dire pour les points de la surface qui séparent les sommets des ellipses et des hyperboles appartenant respectivement aux deux systèmes de lignes de courbure. Les deux points dont il s'agit sont les seuls ombilics que la surface proposée puisse présenter. L'indicatrice y doit être circulaire; en effet, le plan tangent est en ces deux points parallèle aux deux systèmes de plans qui coupent le paraboloïde suivant des cercles.

588. A l'égard des valeurs des rayons de courbure principaux, on trouvera, en substituant les expressions des coefficients différentiels p,q,r,s,t qui ont été données n° 585 dans l'expression (k) du n° 568:

$$R=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}\left\{\frac{a^2+x^2}{a}+\frac{b^2+y^2}{b}\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{\left(\frac{a^2+x^2}{a}+\frac{b^2+y^2}{b}\right)^2-4ab\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1\right)}\right\}.$$

589. Lorsqu'il s'agira d'un paraboloïde de révolution, les deux quantités désignées par a et b, seront égales entre elles. L'expression de α du n° 586 se réduira à

$$\alpha = -\frac{x'^2 - y'^2}{2x'^2} \pm \sqrt{\left(\frac{x'^2 - y'^2}{2x'^2}\right)^2 + \frac{y'^2}{x'^2}},$$

ou bien

$$\alpha = -\frac{x'^2 - y'^2}{2x'^2} \pm \frac{x'^2 + y'^2}{2x'^2}.$$

La valeur positive de α est donc $\frac{y'^2}{x'^2}$. L'équation des projections hyperboliques du premier système des lignes de courbure se réduit à

$$y^2 = \frac{y'^2}{x'^2} . x^2,$$

et appartient au système de deux lignes droites qui se croisent à l'origine des coordonnées.

Quant à la valeur négative de α, elle est -1. Ainsi l'équation des projections elliptiques du second système des lignes de courbure devient

$$y^2 = -x^2 + \frac{0}{0}, \quad \text{ou} \quad y^2 + x^2 = \frac{0}{0},$$

qui appartient à un cercle dont le centre est placé à l'origine des coordonnées, et dont on peut fixer arbitrairement le rayon. En effet, les lignes de courbure dans une surface de révolution, sont évidemment dirigées dans le sens des méridiens et des parallèles.

La distance de l'ombilic au centre, exprimée ci-dessus par $\sqrt{b(a-b)}$, devient nulle : les deux ombilics se confondent en un seul qui est le sommet de la surface de révolution.

En faisant $a=b$, dans l'expression de R du nº 588, elle se réduit à

$$R=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+x^2+y^2}{a^2}}\left(\frac{2a^2+x^2+y^2}{a}\pm\frac{x^2+y^2}{a}\right).$$

Les deux rayons de courbure principaux dans le paraboloïde de révolution sont donc respectivement exprimés par

$$-\frac{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} \quad \text{et} \quad -(a^2+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme l'équation de la parabole dont la révolution autour de l'axe des z décrit cette surface est

$$z=\frac{x^2+y^2}{2a},$$

on voit que la première expression donne le rayon de courbure du méridien, et que la seconde donne le rayon de la courbure dans le sens du parallèle. Cette dernière expression représente la valeur de la normale de la courbe méridienne ; ce qui doit être, puisque toutes les sections faites dans le sens des parallèles ont leur centre de courbure placé sur l'axe de la surface de la révolution.

XLIV. Des surfaces les plus simples dont l'équation aux différences partielles est du premier ordre.

590. Revenons aux notions présentées dans les nᵒˢ 472 et suivants. Une surface quelconque peut en général être considérée comme l'enveloppe de l'espace parcouru par une autre surface qui se déplace sans changer de figure suivant une loi donnée, ou qui se déplace en changeant à la fois de position et de figure suivant des lois également données. Nous représentons générale-

ment l'équation de l'enveloppée, exprimée en quantités finies, par

$$F(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots)=0,$$

dans laquelle x,y,z désignent les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de cette surface; et $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots\ldots$ plusieurs constantes arbitraires, dont les valeurs varient suivant les diverses positions ou les diverses figures que l'enveloppée peut affecter. Mais si l'on veut considérer la surface qui enveloppe une série déterminée des positions de l'enveloppée, afin d'en rechercher les propriétés, on ne peut plus regarder dans l'équation précédente les quantités $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots\ldots$ comme tout à fait arbitraires et indépendantes les unes des autres. On doit concevoir que ces quantités sont liées par des relations qui distinguent la série des positions dont il s'agit. Par conséquent, laissant indéterminé un seul paramètre α, on regardera toutes les autres arbitraires $\beta,\gamma,\delta,\ldots\ldots$ comme des fonctions données $\varphi(\alpha),\psi(\alpha),\varpi(\alpha),\ldots\ldots$ de ce paramètre, et l'on écrira au lieu de l'équation précédente pour représenter l'enveloppée

$$F\left\{x,y,z\ \varphi(\alpha),\psi(\alpha),\varpi(\alpha),\ldots\ldots\right\}=0.$$

En donnant dans cette équation à α toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on aura une certaine série d'enveloppées, déterminée par la forme des fonctions $\varphi,\psi,\varpi\ldots\ldots$; et si ces fonctions demeurent arbitraires, les résultats que l'on obtiendra seront généraux et conviendront à toutes les surfaces possibles qui peuvent être produites par le mouvement d'une enveloppée quelconque comprise dans l'équation $F(x,y,z,\ \alpha,\beta,\beta,\gamma,\delta,\ldots\ldots)=0$.

591. En différentiant successivement par rapport aux variables indépendantes x,y l'équation $F=0$, on a deux nouvelles équations appartenant à l'enveloppée et à l'enveloppe, au moyen desquelles on peut éliminer deux des constantes $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ Par conséquent, si l'équation $F=0$ ne contient que deux de ces constantes, il reste une équation aux différences partielles du premier ordre entièrement délivrée des constantes arbitraires, qui d'après cela appartient à toutes les enveloppées comprises dans l'équation $F=0$ aussi bien qu'à toutes les enveloppes que ces enveloppées peuvent produire, et qui exprime un caractère géométrique qui leur convient spécialement et les distingue de toutes les autres surfaces.

Si l'équation $F=0$ de l'enveloppée contenait trois constantes arbitraires α,β,γ, les équations différentielles du premier ordre ne suffiraient pas en général pour les éliminer : il faudrait passer aux équations du second ordre, et l'on trouverait alors une équation aux différences partielles du second ordre, entièrement délivrée des constantes ou des fonctions arbitraires, exprimant la propriété géométrique qui appartient à toutes les enveloppes, et qui les caractérise.

Si l'équation $F=0$ contenait quatre constantes arbitraires $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, on serait en général obligé pour les éliminer de passer aux équations différentielles du troisième ordre; et ainsi de suite pour les cas où il y aurait un plus grand nombre de constantes arbitraires.

592. Lorsque l'équation de l'enveloppée

$$F\left\{x,y,z,\alpha,\varphi(\alpha),\psi(\alpha),\omega(\alpha),\ldots\right\}=0$$

est donnée, l'équation générale de l'enveloppe exprimée

en quantités finies s'en déduit immédiatement. Car l'équation $F+\frac{dF}{d\alpha}d\alpha=0$, que l'on peut réduire à $\frac{dF}{d\alpha}d\alpha=0$, appartenant à l'enveloppée infiniment voisine, le système des équations

$$F=0\,,\qquad \frac{dF}{d\alpha}=0,$$

représente la courbe d'intersection de ces deux enveloppées, courbe que nous appelons caractéristique. Ces deux équations donneront donc toutes les caractéristiques possibles appartenant à la série des positions de l'enveloppée définie par les fonctions $\varphi,\psi,\varpi,\ldots$ quand on y fera varier α depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Donc, puisque l'enveloppe est évidemment le lieu de ces caractéristiques, l'équation de l'enveloppe est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations

$$F=0\,,\qquad \frac{dF}{d\alpha}=0\,,$$

élimination qui ne peut être effectuée qu'après que les fonctions $\varphi,\psi,\varpi,\ldots\ldots$ auront été définies.

593. Il existe généralement sur une enveloppe quelconque, et par conséquent sur une surface quelconque (car toutes les surfaces peuvent être regardées comme des enveloppes), diverses lignes remarquables dont le caractère géométrique résulte de la définition seule de l'enveloppée, et subsiste, comme le caractère géométrique de l'enveloppe elle-même, indépendamment des lois arbitraires qui déterminent le mode de déplacement de cette enveloppée. Les équations aux différences ordinaires de ces lignes, comme on l'a vu dans les n°s 479 et

suivants pour la caractéristique, peuvent être déduites de l'équation aux différences partielles de la surface, qu'elles servent à intégrer; et l'on peut aussi obtenir leurs équations en quantités finies au moyen de celle de l'enveloppée.

Quant à la caractéristique, elle est représentée par le système des deux équations

$$F=0, \qquad \frac{dF}{d\alpha}=0,$$

qui, lorsque les fonctions $\varphi, \psi, \varpi, \ldots$ auront été définies, donneront toutes les caractéristiques appartenant à une même enveloppe quelconque en fixant convenablement la valeur de α.

594. Considérons maintenant les deux caractéristiques consécutives qui résultent de l'intersection deux à deux de trois enveloppées consécutives. Les équations de ces trois enveloppées étant représentées par $F=0$, $F+\frac{dF}{d\alpha}d\alpha=0$, $F+2\frac{dF}{d\alpha}d\alpha+\frac{d^2F}{d\alpha^2}d\alpha^2=0$, la première caractéristique est donnée par les deux équations $F=0$ et $\frac{dF}{d\alpha}=0$, et la seconde caractéristique par les deux équations $\frac{dF}{d\alpha}=0$ et $\frac{d^2F}{d\alpha^2}=0$. Ces deux lignes courbes se coupent en général en même temps qu'elles se touchent en un point déterminé par les valeurs de x, y, z, qui satisfont simultanément aux trois équations

$$F=0, \qquad \frac{dF}{d\alpha}=0, \qquad \frac{d^2F}{d\alpha^2}=0.$$

En attribuant successivement à α toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, les valeurs des x, y, z,

déduites de ces trois équations, appartiennent à la série des points dans lesquels chaque caractéristique est coupée et touchée par la caractéristique voisine. La suite de ces points forme toujours sur l'enveloppe une ligne remarquable, à laquelle on a donné le nom d'*arête de rebroussement*. Les arêtes de rebroussement partagent en général les surfaces en nappes distinctes : elles sont touchées par toutes les caractéristiques, et sont à leur égard de véritables enveloppes.

L'arête de rebroussement étant le lieu des points d'intersection de la caractéristique correspondante à une valeur déterminée de α, et de la caractéristique voisine, on a évidemment les équations de cette courbe pour une enveloppe déterminée en éliminant α entre les trois équations

$$F=0, \qquad \frac{dF}{d\alpha}=0, \qquad \frac{d^2F}{d\alpha^2}=0,$$

élimination qui ne pourra avoir lieu qu'après que les fonctions $\varphi, \psi, \varpi, \ldots$ qui définissent l'enveloppe auront été données. Les deux équations en x, y, z, qui résultent de cette élimination, appartiennent donc à l'arête de rebroussement.

595. Considérons encore trois caractéristiques consécutives résultant de l'intersection deux à deux des quatre enveloppées consécutives, dont les équations sont

$$F=0, F+\frac{dF}{d\alpha}d\alpha=0, F+2\frac{dF}{d\alpha}d\alpha+\frac{d^2F}{d\alpha^2}d\alpha^2=0,$$
$$F+3\frac{dF}{d\alpha}d\alpha+3\frac{d^2F}{d\alpha^2}d\alpha^2+\frac{d^3F}{d\alpha^3}d\alpha^3=0.$$

Si ces trois caractéristiques se coupent en un seul point,

ce qui ne peut avoir lieu que dans des cas très-particuliers, les valeurs de x,y,z, appartenant à ce point, satisferont à la fois aux quatre équations précédentes. Donc, si l'on élimine x,y,z entre les quatre équations,

$$F=0, \quad \frac{dF}{d\alpha}=0, \quad \frac{d^2F}{d\alpha^2}=0, \quad \frac{d^3F}{d\alpha^3}=0,$$

l'équation en α, qui restera après cette élimination, donnera la valeur de ce paramètre, à laquelle correspondra la caractéristique sur laquelle le point dont il s'agit se trouvera placé. Il sera donc situé au lieu où cette caractéristique touche l'arête de rebroussement. Les points de cette espèce sont toujours très-remarquables sur cette arête, à l'égard de laquelle ils sont eux-mêmes des points d'inflexion ou de rebroussement.

596. Il arrive quelquefois que les caractéristiques d'une enveloppe ne se coupent nulle part, et par conséquent que la surface ne présente pas d'arête de rebroussement. Mais alors il existe en général un point sur chaque caractéristique où elle se trouve plus rapprochée de la caractéristique contiguë que dans tout autre lieu. La série de ces points forme sur la surface une ligne que l'on distingue facilement, et que l'on a nommée *ligne de striction*.

Surfaces cylindriques.

597. Une surface cylindrique, considérée de la manière la plus générale, peut être regardée comme l'enveloppe de l'espace décrit par un plan qui se meut sans cesser d'être parallèle à une même droite donnée prise pour directrice. Soient

$$x = az, \qquad y = bz,$$

les équations de cette directrice. L'équation d'un plan étant

$$z = Ax + By + C,$$

ce plan sera parallèle à la droite donnée si l'on a la relation

$$1 = Aa + Bb,$$

au moyen de laquelle on peut éliminer l'une des constantes A, B. En éliminant A, par exemple, il viendra

$$z = \frac{1 - Bb}{a} x + By + C,$$

pour l'équation d'un plan quelconque, parallèle à la droite donnée. Cette équation est ici celle de l'enveloppée, et B, C sont les deux constantes arbitraires qui en déterminent la position. En éliminant donc ces deux constantes entre cette équation et ses deux équations différentielles du premier ordre, qui sont

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1 - Bb}{a},$$

$$\frac{dz}{dy} = B,$$

il viendra

$$a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} = 1,$$

pour l'équation aux différences partielles du premier ordre qui appartient également à l'enveloppée et à l'enveloppe, c'est-à-dire au plan mobile et à une surface cylindrique quelconque décrite par ce plan.

On aurait pu reconnaître immédiatement que

$$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1,$$

appartient à une surface cylindrique quelconque, dont les arêtes sont parallèles à la droite ayant pour équations $x=az, y=bz$, en remarquant que tout plan tangent à cette surface doit être parallèle à la droite dont il s'agit.

598. Pour intégrer l'équation précédente, conformément à ce qui a été exposé dans les n°s 478 et suivants, on formera les équations aux différences ordinaires de la caractéristique, qui seront ici

$$\begin{aligned} ady-bdx&=0, \\ adz-\ \ dx&=0, \\ bdz-\ \ dy&=0. \end{aligned}$$

Ces équations appartiennent évidemment à une ligne droite parallèle à la directrice, et l'on aurait pu les écrire immédiatement en remarquant que la caractéristique est l'intersection de deux plans parallèles à cette ligne. En intégrant les deux dernières il viendra

$$\begin{aligned} x&=az+\alpha, \\ y&=bz+\beta, \end{aligned}$$

α et β étant deux constantes arbitraires. L'intégrale générale est donc

$$y-bz=\varphi(x-az),$$

φ désignant une fonction arbitraire. Cette équation appartient à toute surface cylindrique, dont la génératrice est parallèle à la directrice proposée. Elle a le même degré de généralité que l'équation aux différences par-

tielles $a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1$. On pourrait la trouver directement en remarquant que les équations d'une génératrice quelconque peuvent être représentées par

$$x=az+\alpha$$
$$y=bz+\beta\ ,$$

α et β étant deux constantes indéterminées. Or, si un point se meut sur la surface cylindrique sans sortir de cette même génératrice, les coordonnées de ce point satisferont à ces équations. Mais si le point se meut en passant sur une génératrice voisine, ses coordonnées ne pourront satisfaire à ces mêmes équations, à moins que l'on ne fasse varier en même temps α et β. Donc ces quantités demeurent constantes, ou varient simultanément : elles sont donc fonction l'une de l'autre, et l'on peut écrire $\beta=\varphi(\alpha)$, ou

$$y-bz=\varphi(x-az).$$

599. L'équation

$$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1 \quad \text{ou} \quad ap+bq=1$$

étant différentiée par rapport à x et à y, donne

$$a\frac{d^2z}{dx^2}+b\frac{d^2z}{dxdy}=0 \quad \text{ou} \quad ar+bs=0$$
$$a\frac{d^2z}{dxdy}+b\frac{d^2z}{dy^2}=0 \qquad as+bt=0.$$

Donc $rt-s^2=0$, équation générale des surfaces développables. Les surfaces cylindriques présentent, quant à leur courbure, les propriétés qui ont été indiquées n° 577.

600. La fonction φ, dans l'équation générale

$$y-bz=\varphi(x-az)$$

des surfaces cylindriques, peut être déterminée d'après diverses conditions. Si la surface doit passer par une ligne courbe donnée, dont les équations soient $\pi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$, il est visible que ces équations et les deux équations de la génératrice $x=az+\alpha$, $y=bz+\varphi(\alpha)$ doivent pouvoir être satisfaites par les mêmes valeurs de x,y,z, quelles que soient les constantes α et $\varphi(\alpha)$. Ainsi, éliminant x,y,z entre les quatre équations

$$\Pi(x,y,z)=0$$
$$\Psi(x,y,z)=0$$
$$x-az=\alpha$$
$$y-bz=\varphi(\alpha),$$

il restera une équation entre α et $\varphi(\alpha)$, qui déterminera la fonction φ. Soit $f(\alpha,\varphi(\alpha))=0$ l'équation dont il s'agit : l'équation de la surface cylindrique demandée, sera donc

$$f(x-az,y-bz)=0.$$

601. Si la surface cylindrique doit être tangente à une surface courbe donnée, dont l'équation soit $\pi(x,y,z)=0$, on remarquera que, pour tous les points de la courbe de contact, les deux surfaces ont le même plan tangent. Donc les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, tirées de l'équation $\pi(x,y,z)=0$ doivent, pour les points dont il s'agit, satisfaire à l'équation différentielle de la surface cylindrique. On trouvera donc une équation $\Psi(x,y,z)=0$ de la courbe de contact en prenant les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ dans l'équation donnée $\pi(x,y,z)=0$, et les substituant dans l'équation aux différences par-

tielles $a\frac{dz}{dy}+b\frac{dz}{dy}=1$. Ayant maintenant deux équations $\pi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$, appartenant à une courbe par laquelle doit passer la surface cylindrique cherchée, on opérera comme on l'a vu dans le numéro précédent.

Surfaces coniques.

602. Une surface conique est l'enveloppe de l'espace décrit par un plan qui passe constamment par un point donné. Ce point est le sommet, ou le centre de la surface. Soient a,b,c ses coordonnées : l'équation du plan mobile ou de l'enveloppée sera donc

$$z-c=A(x-a)+B(y-b)\ ;$$

A et B étant deux constantes arbitraires. On déduit de cette équation

$$\frac{dz}{dx}=A\,, \qquad \frac{dz}{dy}=B\ ;$$

et par conséquent l'élimination de ces deux constantes donne pour l'équation aux différences partielles des surfaces coniques, considérées de la manière la plus générale

$$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c.$$

On aurait pu obtenir directement cette équation en remarquant que tout plan tangent à la surface conique doit passer par le centre dont les coordonnées sont a,b,c.

603. Les équations de la caractéristique sont ici

$$(x-a)\,dy-(y-b)\,dx=0$$
$$(x-a)\,dz-(z-c)\,dx=0$$
$$(y-b)\,dz-(z-c)\,dy=0\ :$$

elles appartiennent évidemment aux projections d'une ligne droite, passant par le point dont les coordonnées sont a, b, c. On déduit des deux dernières

$$\frac{x-a}{z-c}=\alpha,$$

$$\frac{y-b}{z-c}=\beta,$$

α et β représentant deux constantes arbitraires; et par conséquent l'intégrale de l'équation du numéro précédent, ou l'équation d'une surface conique quelconque, est

$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right),$$

φ désignant une fonction arbitraire.

On aurait pu obtenir directement cette équation en remarquant que, quand un point se déplace sur une surface conique, les rapports $\frac{x-a}{z-c}$, $\frac{y-b}{z-c}$ demeurent tous deux constants si ce point reste sur une même arête rectiligne, et varient tous deux si le point dont il s'agit passe d'une arête à une autre. Ces rapports demeurant constants ou variant ensemble, sont donc fonction l'un de l'autre pour toutes les valeurs de x, y, z, qui satisfont à l'équation d'une surface conique.

604. L'équation

$$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dy}{dz}=z-c, \text{ ou } (x-a)p+(y-b)q=z-c$$

étant différentiée par rapport à x et à y donne

$$(x-a)\frac{d^2z}{dx^2}+(y-b\frac{d^2z}{dxdy}=0, \quad \text{ou} \quad (x-a)r+(y-b)s=0$$

$$(x-a)\frac{d^2z}{dxdy}+(y-b)\frac{d^2z}{dy^2}=0 \qquad (x-a)s+(y-b)t=0,$$

d'où $rt - s^2 = 0$, relation qui appartient à toutes les surfaces développables. On peut faire ici la même remarque qui a été faite n° 599.

605. Si dans l'équation générale

$$\frac{y-b}{z-c} = \varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$$

la fonction φ doit être déterminée par la condition que la surface conique passe par une courbe donnée dont les équations soient $\pi(x,y,z)=0$, $\Psi(x,y,z)=0$, les équations de la génératrice devront subsister en même temps que celles-ci. Posant donc les quatre équations

$$\Pi(x,y,z)=0$$
$$\Psi(x,y,z)=0$$
$$\frac{x-a}{z-c}=\alpha,$$
$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi(\alpha)$$

entre lesquelles on éliminera x,y,z. il restera une équation que nous représentons par $f[\alpha,\varphi(\alpha)]=0$. L'équation de la surface conique demandée sera donc

$$f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0.$$

606. Si la fonction φ doit être déterminée par la condition que la surface cônique soit tangente à une surface donnée ayant pour équation $\pi(x,y,z)=0$, on verra comme dans le n° 601, que l'on obtient une seconde équation $\psi(x,y,z)=0$ de la courbe de contact en prenant les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ dans l'équation donnée $\pi(x,y,z)=0$, et les substituant dans l'équation différentielle

$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c$. La question se trouve alors ramenée au cas du numéro précédent.

Surfaces de révolution.

607. Une surface de révolution est l'enveloppe de l'espace décrit par une sphère dont le centre se meut sur une ligne droite qui est l'axe de la surface, et dont le rayon varie suivant une loi quelconque. Soient

$$x'=Az'+a$$
$$y'=Bz'+b$$

les équations données de l'axe de la surface. L'équation d'une sphère de rayon r, dont le centre est placé sur cet axe, sera

$$(x-Az'-a)^2+(y-Bz'-b)^2+(z-z')^2=r^2,$$

x,y,z, représentant les coordonnées d'un point quelconque de la sphère. Cette équation appartient donc ici à l'enveloppée; z' et r sont les deux constantes arbitraires qui peuvent être déterminées de manière à donner une enveloppée quelconque. En différentiant l'équation dont il s'agit par rapport à x et à y, il vient

$$x-Az'-a+(z-z')\frac{dz}{dx}=0$$
$$y-Bz'-b+(z-z')\frac{dz}{dy}=0\,;$$

et en éliminant z',

$$(y-b-Bz)\frac{dz}{dx}-(x-a-Az)\frac{dz}{dy}=B(x-a)-A(y-b)$$

pour l'équation aux différences partielles appartenant à toutes les surfaces de révolution.

On peut obtenir la même équation en remarquant que, dans un point quelconque d'une surface de révolution, le plan tangent est perpendiculaire au plan méridien, c'est-à-dire au plan mené par l'axe de la surface et par le point dont il s'agit. L'équation d'un plan méridien, passant par le point de la surface, dont les coordonnées sont x, y, z, peut être représentée par

$$z'-z=\mathrm{M}(x'-x)+\mathrm{N}(y'-y),$$

les constantes M, N étant déterminées de manière à faire passer également ce plan par l'axe de la surface. Cette condition donne la seconde équation

$$z'-z=\mathrm{M}(\mathrm{A}z'+a-x)+\mathrm{N}(\mathrm{B}z'+b-y),$$

qui doit subsister quelle que soit z'. Elle se décompose donc dans les deux suivantes

$$1=\mathrm{MA}+\mathrm{N}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{M}=\frac{y-b-\mathrm{B}z}{\mathrm{B}(a-x)-\mathrm{A}(b-y)},$$

$$-z=\mathrm{M}(a-x)+\mathrm{N}(b-y) \quad -\mathrm{N}=\frac{x-a-\mathrm{A}z}{\mathrm{B}(a-x)-\mathrm{A}(b-y)}.$$

Mais l'équation du plan tangent étant

$$z'-z=\frac{dz}{dx}(x'-x)+\frac{dz}{dy}(y'-y),$$

il sera penpendiculaire au plan méridien si l'on a la relation

$$\mathrm{M}\frac{dz}{dx}+\mathrm{N}\frac{dz}{dy}+1=0,$$

équation qui revient à la précédente quand on met à la place de M et N leurs valeurs.

On peut encore obtenir cette équation d'après la propriété générale des surfaces de révolution qui con-

siste en ce que la normale à un point quelconque rencontre toujours l'axe. Les équations de la normale sont en général

$$x'-x+\frac{dz}{dx}(z'-z)=0$$
$$y'-y+\frac{dz}{dy}(z'-z)=0\ :$$

et les mêmes valeurs de x',y',z' devront donc satisfaire à ces équations et à celles de l'axe. Si l'on élimine x',y',z' entre ces quatre équations, on retrouvera l'équation aux différences partielles dont il s'agit.

608. L'intégration de l'équation

$$(y-b-\mathrm{B}z\frac{dz}{dx}-x-a-\mathrm{A}z)\frac{dz}{dy}=\mathrm{B}(x-a)-\mathrm{A}(y-b),$$

dépend, conformément aux nos 478 et suivants, des équations

$$(y-b-\mathrm{B}z)\,dy+(x-a-\mathrm{A}z)\,dx=0$$
$$(y-b-\mathrm{B}z)\,dz-[\mathrm{B}(x-a)-\mathrm{A}(y-b)]\,dx=0$$
$$-(x-a-\mathrm{A}z)\,dz-[\mathrm{B}(x-a)-\mathrm{A}(y-b)]\,dy=0$$

qui appartiennent à la caractéristique. Ces équations ne peuvent être immédiatement intégrées ; mais si l'on ajoute les deux dernières après avoir multiplié la première par A, et la seconde par B, puis si on les ajoute de nouveau après avoir multiplié la première par $x-a$ et la seconde par $y-b$, on trouvera

$$\mathrm{A}dx+\mathrm{B}dy+dz=0$$
$$(x-a)\,dx+(y-b)\,dy+zdz=0\ ;$$

et en intégrant

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+z=\alpha$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=6,$$

α et β étant deux constantes arbitraires. L'une de ces équations appartenant à un plan quelconque perpendiculaire à l'axe donné de la surface de révolution, l'autre à une sphère d'un rayon quelconque, dont le centre est placé au point, dont les coordonnées sont a,b,c, c'est-à-dire au point où cet axe rencontre le plan des x,y, on reconnaît que la caractéristique est toujours un cercle dont le centre est dans l'axe, et dont le plan est perpendiculaire à cet axe. On a d'ailleurs pour l'équation générale des surfaces de révolution

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi(Ax+By+z),$$

φ désignant toujours une fonction arbitraire.

On obtient immédiatement cette équation en remarquant que si un point se déplace sur la surface sans sortir d'une même caractéristique, c'est-à-dire d'une même section faite perpendiculairement à l'axe, ou d'un parallèle, les quantités $Ax+By+z$ et $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2$ conserveront toutes deux des valeurs constantes, tandis qu'elles varieront toutes deux si le point se déplace en passant d'une caractéristique à une autre; d'où il suit que l'une de ces quantités est nécessairement fonction de l'autre.

609. La fonction arbitraire φ dans l'équation précédente peut être déterminée par la condition que la surface passe par une courbe quelconque donnée, dont les équations sont $\pi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$; c'est-à-dire que cette surface soit décrite par la révolution de la courbe autour de l'axe. Comme toutes les caractéristiques doivent rencontrer la courbe donnée, il doit exister des valeurs de x,y,z, qui satisfont à la fois aux quatre équations

$$\Pi(x,y,z)=0$$
$$\Psi(x,y,z)=0$$
$$Ax+By+z=\alpha$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi(\alpha)$$

Éliminant x,y,z entre ces équations, il restera une relation entre α et $\varphi(\alpha)$, que nous désignons par $f[\alpha,\varphi(\alpha)]=0$, par laquelle la fonction φ est déterminée. L'équation de la surface demandée est

$$f[Ax+By+z,(x-a)^2+(y-b)^2+z^2]=0.$$

610. La fonction arbitraire peut également être déterminée dans l'équation du nº 608, par la condition que la surface de révolution enveloppe une surface quelconque donnée, dont l'équation est $\pi(x,y,z)=0$, c'est-à-dire soit décrite par la révolution de cette surface autour de l'axe. Il est visible que la surface de révolution demandée doit toucher la surface donnée, et qu'on aura une seconde équation primitive appartenant à la courbe de contact en prenant les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ dans l'équation $\pi(x,y,z)=0$, et les substituant dans l'équation différentielle

$$(y-b-Bz)\,\frac{dz}{dx}-(x-a-Az)\,\frac{dz}{dy}=B(x-a)-A(y-b),$$

Soit $\psi(x,y,z)=0$ le résultat de cette substitution : la solution s'achèvera conformément à ce qu'on a vu dans le numéro précédent.

Surface gauche décrite par une ligne droite horizontale, passant toujours par une même verticale.

611. Nous supposerons le plan des xy horizontal et

l'axe des z vertical, et nous considérerons la surface décrite par une ligne droite parallèle au plan des xy, et passant constamment par l'axe des z.

Considérons en premier lieu la surface qui serait l'enveloppe de l'espace décrit par un cylindre de rayon r, dont l'axe demeurerait toujours parallèle au plan des xy, et passerait constamment par l'axe des z. On aurait évidemment

$$\frac{(y-ax)^2}{a^2+1}+(z-c)^2=r^2$$

pour l'équation de ce cylindre, qui est l'enveloppée; a et c étant les deux constantes arbitraires, dont la première représente la tangente de l'angle formé par l'axe du cylindre avez le plan des xz, et la seconde la distance de cet axe au plan des xy. Prenant les deux équations différentielles, il viendra

$$-\frac{(y-ax)a}{a^2+1}+(z-c)\frac{dz}{dx}=0$$

$$\frac{y-ax}{a^2+1}+(z-c)\frac{dz}{dy}=0\,;$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$(z-c)\left(\frac{dz}{dx}+a\frac{dz}{dy}\right)=0\,,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dz}{dx}+a\frac{dz}{dy}=0,\quad \text{d'où}\quad a=-\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}}$$

valeur qui doit être substituée dans l'équation de l'enveloppée. Mais si nous supposons le rayon r infiniment

petit, cas dans lequel l'enveloppe de l'espace décrit par le cylindre ne différera pas de la surface gauche dont il s'agit, nous devons négliger dans cette équation les termes $(z-c)^2$ et r^2; elle deviendra donc, en y remplaçant a par la valeur précédente,

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=0,$$

qui est l'équation aux différences partielles de cette surface gauche.

On pourrait parvenir directement au même résultat en partant de cette propriété générale des surfaces gauches qui consiste en ce que, pour un point quelconque de ces surfaces, le plan tangent contient la génératrice rectiligne qui passe par ce point. L'équation générale du plan tangent étant

$$z'-z=(x'-x)\frac{dz}{dx}+(y'-y)\frac{dz}{dy},$$

on a

$$(x'-x)\frac{dz}{dx}+(y'-y)\frac{dz}{dy}=0$$

pour l'équation de l'intersection de ce plan par un plan horizontal mené par le point de tangence. Or, cette intersection n'étant autre chose que la génératrice elle-même, qui doit rencontrer l'axe des z, son équation doit être satisfaite par les valeurs $x'=0$, $y'=0$, ce qui donne comme ci-dessus

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=0.$$

612. L'intégrale générale de cette équation s'obtiendra en posant

$$xdy - ydx = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{y}{x} = \alpha$$

$$dz = 0, \qquad\qquad z = \beta,$$

α et β étant deux constantes arbitraires ; ce qui donne

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

pour l'intégrale cherchée, φ étant le signe d'une fonction arbitraire. La considération de la caractéristique, qui est toujours une ligne droite horizontale ayant pour équations $\frac{y}{x} = \alpha$ et $z = \beta$, conduit directement à cette même équation.

613. Si la fonction arbitraire doit être déterminée de manière à faire passer la surface par une courbe quelconque ayant pour équations $\pi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$, on verra comme ci-dessus que l'on doit éliminer x,y,z entre les quatre équations

$$\Pi(x,y,z)=0$$
$$\Psi(x,y,z)=0$$
$$\frac{y}{x}=\alpha$$
$$z=\beta\,;$$

et qu'en représentant par $f(\alpha,\beta)=0$, le résultat de l'élimination, l'équation de la surface demandée est

$$f\left(\frac{y}{x}, z\right)=0.$$

614. Enfin, si la fonction arbitraire doit être déterminée de manière que la surface gauche, dont il

s'agit, touche et embrasse une surface donnée, ayant pour équation $\pi(x,y,z)=0$, on prendra les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ dans cette équation, et les substituant dans l'équation différentielle $x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=0$, on aura une seconde équation primitive $\psi(x,y,z)=0$, appartenant à la courbe de contact, ce qui ramène la question au cas du numéro précédent.

NOTES.

I.

Sur la formule de Maclaurin.

M. Cauchy a présenté le reste de la série de Maclaurin sous une forme nouvelle. Pour obtenir sa formule représentons par $\varphi(x, z)$ ou simplement par $\varphi(z)$ la quantité

$$f(x)-f(z)-\frac{x-z}{1}f'(z)-\ldots-\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(z)$$

qui s'évanouit pour $z=x$. En différentiant par rapport à z et omettant les termes qui se détruisent, on trouve

$$\varphi'(z)=-\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(z).$$

Mais par la formule de Taylor bornée à deux termes, et en observant que $z=x+(z-x)$, on a

$$\varphi(z)=\varphi(x)+(z-x)\varphi'\big(x+\theta_1(z-x)\big),$$

θ_1 désignant une quantité comprise entre 0 et 1. A cause de $\varphi(x)=0$, cette équation se réduit à

$$\varphi(z)=(z-x)\varphi'\big(x+\theta_1(z-x)\big),$$

puis, en remplaçant la fonction φ' par sa valeur, elle devient

$$\varphi(z)=\frac{\theta_1^{n-1}(x-z)^n}{1.2....(n-1)}f^{(n)}\big(x+\theta_1(z-x)\big)$$

ou bien, en posant $\theta_1=1-\theta$,

$$\varphi(z)=\frac{(1-\theta)^{n-1}(x-z)^n}{1.2....(n-1)}f^{(n)}\big(z+\theta(x-z)\big):$$

Pour le cas particulier de $z=0$,

$$\varphi(0)=\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2...(n-1)}f^{(n)}(\theta x)\,;$$

θ est, comme θ_1, compris entre 0 et 1 : $\varphi(0)$ est d'ailleurs la valeur de la quantité

$$f(x)-f(0)-\frac{x}{1}f'(0)-....-\frac{x^{n-1}}{1.3...(n-1)}f^{(n-1)}(0):$$

par suite on a

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+....+\frac{x^{n-1}}{1.2...(n-1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2...(n-1)}f^{(n)}(\theta x).$$

Telle est la formule de M. Cauchy.

II.

Sur les fractions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Lorsque, pour une valeur particulière a de x, une fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, on obtient généralement la vraie valeur A de cette fraction en la remplaçant par la suivante

$$\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

et faisant ensuite $x=a$. La même règle s'applique encore à la fraction proposée lorsque, pour $x=a$, elle se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Pour démontrer ce théorème dû, je crois, à M. Cauchy, écrivons d'abord

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}:$$

pour $x=a$, le second membre devient $\frac{0}{0}$; sa vraie valeur A s'obtiendra donc en faisant $x=a$ dans la fraction nouvelle

$$\frac{-\frac{F'(x)}{F(x)^2}}{-\frac{f'(x)}{f(x)^2}} = \frac{F'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f(x)^2}{F(x)^2},$$

on a par suite

$$A = \frac{F'(a)}{f'(a)} \cdot A^2, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

En appliquant cette règle aux deux quantités

$$x^n \log. x, \quad \frac{\log. x}{x^n},$$

dont la première doit être regardée comme le quotient de log. x par $\frac{1}{x^n}$, on trouve, en supposant n positif,

$$x^n \log. x = -\frac{x^n}{n} = 0 \text{ pour } x = 0,$$

et

$$\frac{\log. x}{x^n} = \frac{1}{nx^n} = 0 \text{ pour } x = \infty.$$

III.

Sur quelques intégrales définies.

1. Legendre a donné le nom d'intégrales eulériennes de première et de seconde espèce aux deux intégrales suivantes

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx,$$

qui se présentent souvent dans les applications et dont Euler s'est beaucoup occupé : p, q, n, sont des exposants positifs quelconques. On désigne ordinairement par $\Gamma(n)$ la seconde de ces intégrales, en sorte que

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx;$$

en posant $e^{-x}=z$, ou $x=y^2$, on a encore

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty\left(\log.\frac{1}{z}\right)^{n-1}dz=2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2n-1}dy.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\int e^{-x}x^{n-1}dx=\frac{e^{-x}x^n}{n}+\frac{1}{n}\int e^{-x}x^n dx:$$

donc, entre les limites $x=0$, $x=\infty$, il vient

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x}x^n dx,$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n} \quad \text{ou} \quad \Gamma(n+1)=n\Gamma(n).$$

Cette formule permet de calculer la valeur de $\Gamma(n)$, quel que soit l'indice n, lorsque cette valeur est connue pour $n < 1$. Elle donne successivement

$$\Gamma(2) = \Gamma(1), \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1.\Gamma(1),$$
$$\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3.2.1.\Gamma(1), \ldots\ldots$$
$$\Gamma(n) = (n-1)\ldots 2.1.\Gamma(1);$$

or

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

Donc

$$\Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-1),$$

n étant un nombre entier quelconque.

On trouve de même

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \ldots$$
$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}.\frac{2n-3}{2}\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Mais

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi};$$

Donc en général

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}.\frac{2n-3}{2}\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}.$$

2. L'intégrale eulérienne de première espèce s'exprime toujours en fonctions Γ à l'aide de la formule suivante

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Cette formule est due à Euler. Voici comment M. Poisson la démontre par la considération des inté-

grales doubles. Il multiplie membre à membre les deux équations

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2p-1} dy,$$

$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2q-1} dx,$$

et observe que le produit des deux seconds membres est égal à quatre fois l'intégrale double de

$$e^{-(y^2+x^2)} y^{2p-1} x^{2q-1} dy dx,$$

les limites de l'intégrale étant 0 et ∞ pour les deux variables. On a ainsi

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y^2+x^2)} y^{2p-1} x^{2q-1} dy dx.$$

Mais si l'on regarde x et y comme des coordonnées rectangulaires, et qu'on y joigne une troisième coordonnée z perpendiculaire aux deux autres, l'intégrale double dont nous venons de parler représentera le volume compris dans l'angle des coordonnées positives, entre les plans des xy, des xz, des yz et la surface dont l'équation est

$$z = e^{-(y^2+x^2)} y^{2p-1} x^{2q-1}.$$

L'expression de ce volume changera de forme si l'on remplace les coordonnées rectangulaires x et y par des coordonnées polaires r et ω, en faisant

$$x = r\cos.\omega, \quad y = r\sin.\omega.$$

L'élément de volume sera $z.rdrd\omega$, et il faudra intégrer entre les limites

$$\omega = 0, \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \quad r = 0, \quad r = \infty.$$

On aura ainsi

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\,.\,rdrd\omega,$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}.\,r^{2(p+q)-1}\sin.^{2p-1}\omega.\cos.^{2q-1}\omega.\,drd\omega,$$

en remplaçant z et ensuite y et x par leurs valeurs. L'intégrale double placée dans le second membre est le produit de deux intégrales simples, dont l'une, savoir

$$\int_0^\infty e^{-r^2}.\,r^{2(p+q)-1}dr$$

est égale à $\frac{1}{2}\Gamma(p+q)$, et dont l'autre, savoir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin.^{2p-1}\omega\cos.^{2q-1}\omega d\omega,$$

se réduit à

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

lorsqu'on pose $\sin.\,\omega=\sqrt{x}$. Il suit de là que

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx;$$

par suite on a

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

ce qui démontre la formule d'Euler. On voit par cette formule que l'intégrale eulérienne de première espèce

est une fonction symétrique de deux paramètres p et q dont elle dépend.

3. En généralisant la formule d'Euler, M. Lejeune Dirichlet a obtenu des résultats intéressants. Il a considéré l'intégrale

$$V = \int\int \ldots \int x^{a-1} y^{b-1} \ldots z^{c-1} dx dy \ldots dz, \tag{1}$$

dans laquelle les variables $x, y, \ldots z$ doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \ldots + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r < 1. \tag{2}$$

$a, b, \ldots c, \alpha, \beta, \gamma, p, q, \ldots r$ sont des constantes positives. La méthode de M. Dirichlet l'a conduit à une valeur remarquable de V, savoir

$$V = \frac{\alpha^a \beta^b \ldots \gamma^c}{pq \ldots r} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{c}{r}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \ldots + \frac{c}{r}\right)}, \tag{3}$$

que l'on peut, dit-il, obtenir par différents moyens, et qui renferme un grand nombre de résultats relatifs aux volumes, centres de gravité, moments d'inertie, etc. Cette formule peut se démontrer de la manière suivante.

4. D'abord en remplaçant

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p \text{ par } x, \quad \left(\frac{y}{\beta}\right)^q \text{ par } y, \ldots \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r \text{ par } z,$$

et dx, dy, ... dz par

$$\frac{\alpha}{p} x^{\frac{1}{p}-1} dx, \quad \frac{\beta}{q} y^{\frac{1}{q}-1} dy, \ldots \quad \frac{\gamma}{r} z^{\frac{1}{r}-1} dz,$$

on a

$$V=\frac{\alpha^a\beta^b\ldots\gamma^c}{pq\ldots r}.U,$$

U étant une intégrale

$$(4)\qquad \int\int\ldots\int x^{\frac{a}{p}-1}.y^{\frac{b}{q}-1}\ldots z^{\frac{c}{r}-1}.dxdy\ldots dz,$$

de même forme que V, mais dans laquelle $x, y, \ldots z$ doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$x+y+\ldots+z<1.$$

En posant

$$\frac{a}{p}=k, \frac{b}{q}=l, \ldots \frac{c}{r}=m,$$

il viendra

$$\int\int\ldots\int x^{k-1}.y^{l-1}\ldots z^{m-1}.dxdy\ldots dz,$$

et il s'agira de prouver que

$$(5)\qquad U=\frac{\Gamma(k)\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+\ldots+m)}.$$

5. Quand le nombre des variables x, y, etc., se réduit à l'unité, on a

$$U=\int_0^1 x^{k-1}dx=\frac{1}{k}=\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(1+k)}:$$

la formule (5) est donc exacte alors.

Elle l'est également, d'après un théorème connu, lorsque le nombre des variables x, y, etc., se réduit à 2 : il vient dans ce cas

$$U=\int_0^1 x^{k-1}dx\int_0^{1-x} y^{l-1}dy=\frac{1}{l}\int_0^1 x^{k-1}.(1-x)^l.dx.$$

Or, par la formule d'Euler, on a

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^l.\,dx = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l)}{\Gamma(1+k+l)},$$

et il en résulte

$$U = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l)}{l\Gamma(1+k+l)} = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(1+k+l)},$$

ce qui s'accorde avec la formule (5).

6. Supposons maintenant que U soit une intégrale triple : on pourra l'écrire ainsi

$$U = \int_0^1 x^{k-1}dx \int_0^{y_1} y^{l-1}dy \int_0^{z_1} z^{m-1}dz,$$

y_1 et z_1 représentant respectivement les différences $1-x$, $1-x-y$, en sorte que l'on a

$$1-x=y_1,\; y_1-y=z_1.$$

Désignons par u et v de nouvelles variables, et posons

$$z = vz_1, \quad y = uy_1;$$

les limites communes de u et v seront 0 et 1 : l'intégrale U prendra ainsi la forme

$$U = \int_0^1 x^{k-1}dx \int_0^1 u^{l-1}y_1^l du \int_0^1 v^{m-1}z_1^m dv;$$

puis, à cause de

$$y_1 = 1-x, \quad z_1 = y_1 - uy_1 = (1-x)(1-u),$$

elle deviendra

$$U = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l+m}dx.\int_0^1 u^{l-1}(1-u)^m du \int_0^1 v^{m-1}dv.$$

Les intégrations relatives aux diverses variables peuvent maintenant s'effectuer indépendamment l'une de l'autre, et comme on a

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l+m}dx = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l+m)}{\Gamma(1+k+l+m)},$$

$$\int_0^1 u^{l-1}(1-u)^m du = \frac{\Gamma(l)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+l+m)}, \quad \int_0^1 v^{m-1}dv = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(1+m)},$$

la valeur de U sera finalement

$$U = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+m)},$$

conformément à la formule (5).

S'il y a quatre variables indépendantes x, y, z, t, dans l'intégrale U, la valeur de cette intégrale s'obtiendra encore par le même procédé. On supposera les intégrations effectuées successivement sur t, z, y et x, et l'on posera

$$1-x = y_1, y_1 - y = z_1, z_1 - z = t_1,$$

les limites relatives à t, z, y et x seront respectivement 0 et t_1, 0 et z_1, 0 et y_1, 0 et 1 : si donc on remplace t, z et y par de nouvelles variables liées aux premières par les relations

$$t = wt_1, \quad z = vz_1, \quad y = uy_1,$$

les limites communes à ces nouvelles variables seront 0 et 1 de plus on aura

$$y_1 = 1-x, \; z_1 = (1-x)(1-u), \; t_1 = (1-x)(1-u)(1-v);$$

par conséquent, les variables x, u, v, w pourront être

séparées ; en d'autres termes l'intégrale multiple U se décomposera dans un produit de quatre intégrales qui toutes s'exprimeront par des fonctions Γ à l'aide de la formule (6). Cette méthode est générale, et quel que soit le nombre des variables x, y, etc., elle conduit à la formule (5) qui se trouve ainsi démontrée.

IV.

Sur l'évaluation approchée du produit 1.2.3...x, *lorsque* x *est très-grand.*

1. La méthode dont je me servirai pour démontrer la formule de Stirling qui sert à cette évaluation, ressemble beaucoup à celle employée par M. Lacroix dans son *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral* (page 678 de la cinquième édition). Cette méthode consiste à chercher le logarithme du produit $1.2.3\ldots x$ et elle repose sur la formule connue de Wallis

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2x}{2x-1}\cdot\frac{2x}{2x+1}\cdots\cdots$$

en vertu de laquelle la quantité

$$\begin{aligned}&2\log.2+2\log.4+\ldots\ldots+2\log.(2x-2)+\log.(2x)\\ &-2\log.1-2\log.3-\ldots\ldots-2\log.(2x-3)-\log.(2x-1)\end{aligned}$$

se réduit à $\log.\pi-\log.2$ lorsque $x=\infty$. Mais je la compléterai en donnant une limite supérieure de l'erreur commise dans l'évaluation approchée de $\log.(1.2.3\ldots x)$.

2. Pour toute valeur positive de z, on a

$$\frac{1}{z}=\int_0^\infty e^{-\alpha z}\,dz,$$

d'où résulte, en intégrant par rapport à z,

$$(1)\qquad \log.z=\int_0^\infty\frac{(e^{-\alpha}-e^{-\alpha z})d\alpha}{\alpha}$$

Faisant successivement, dans cette formule, $z=1$, $z=2$,.... $z=x$, puis ajoutant les résultats ainsi obtenus, il nous viendra

$$(2) \quad \log.(1.2.3...x)=\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha}d\alpha}{\alpha}\left(x-\frac{1-e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}\right).$$

Ainsi la question est ramenée à trouver la valeur de l'intégrale définie placée dans le second membre de l'équation (2). Représentons cette intégrale par u et traitons x comme une variable continue. En différenciant nous obtiendrons

$$\frac{du}{dx}=\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left(e^{-\alpha}-\frac{\alpha e^{-\alpha x}}{e^{\alpha}-1}\right).$$

3. La fonction $\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}$ qui sert de coëfficient à $e^{-\alpha x}$ et que nous désignerons par $f(\alpha)$ peut se développer en une série ordonnée suivant les puissances de α. En différenciant plusieurs fois de suite l'équation

$$(e^{\alpha}-1)f(\alpha)=\alpha,$$

on a

$$(e^{\alpha}-1)f'(\alpha)+e^{\alpha}f(\alpha)=1,$$
$$(e^{\alpha}-1)f''(\alpha)+2e^{\alpha}f'(\alpha)+e^{\alpha}f(\alpha)=0,$$
$$(e^{\alpha}-1)f'''(\alpha)+3e^{\alpha}f''(\alpha)+3e^{\alpha}f'(\alpha)+e^{\alpha}f(\alpha)=0,$$

. . . .

de sorte qu'en posant $\alpha=0$ on trouve sans difficulté

$$f(0)=1,\quad f'(0)=-\frac{1}{2},\ f''(0)=\frac{1}{6},\ldots..$$

Les deux premiers termes du développement de $f(\alpha)$

sont donc $1 - \frac{\alpha}{2}$; et les autres ne peuvent contenir que des puissances paires de α, car la différence

$$f(\alpha) - 1 + \frac{\alpha}{2}$$

est égale à la moitié de

$$\frac{\alpha\left(e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)}{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}} - 2,$$

et par conséquent est une fonction paire de α.

Les valeurs générales de $f''(\alpha)$ et de $f'''(\alpha)$ sont

$$f''(\alpha) = \frac{e^{\alpha}}{(e^{\alpha}-1)^3}\left((\alpha-2)e^{\alpha}+\alpha+2\right),$$

$$f'''(\alpha) = -\frac{e^{\alpha}}{(e^{\alpha}-1)^4}\left((\alpha-3)e^{2\alpha}+4\alpha e^{\alpha}+\alpha+3\right).$$

En se rappelant que la variable α est > 0, on peut prouver que la première de ces deux dérivées est essentiellement positive et la seconde essentiellement négative.

D'abord en posant

$$P = (\alpha-2)e^{\alpha} + \alpha + 2,$$

on a

$$\frac{dP}{d\alpha} = (\alpha-1)e^{\alpha} + 1, \quad \frac{d^2P}{d\alpha^2} = \alpha e^{\alpha}.$$

Pour toute valeur de $\alpha > 0$, on a $\frac{d^2P}{d\alpha^2} > 0$: on a aussi $\frac{dP}{d\alpha} > 0$ et $P > 0$ puisque $\frac{dP}{d\alpha}$ et P s'annullent pour $\alpha = 0$

et prennent ensuite le signe de leurs dérivées. Il suit évidemment de là que $f''(\alpha)$ est une quantité positive.

Posons maintenant

$$P = (\alpha-3)e^{2\alpha}+4\alpha e^{\alpha}+\alpha+3,$$

ce qui donne

$$\frac{dP}{d\alpha} = (2\alpha-5)e^{2\alpha}+(4\alpha+4)e^{\alpha}+1,$$

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} = (4\alpha-8)e^{2\alpha}+(4\alpha+8)e^{\alpha};$$

en faisant

$$Q = (\alpha-2)e^{\alpha}+\alpha+2,$$

nous aurons

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2}=4e^{\alpha}Q,$$

de manière que les deux fonctions Q et $\frac{d^2P}{d\alpha^2}$ seront de même signe. Or, Q et $\frac{dQ}{d\alpha}$ sont zéro pour $\alpha=0$; de plus $\frac{d^2Q}{d\alpha^2}$ est <0 dès que α surpasse zéro : donc il en est de même de Q et de $\frac{d^2P}{d\alpha^2}$; par suite la fonction P jouit aussi de la même propriété puisque l'on a $P=0$ et $\frac{dP}{d\alpha}=0$ quand $\alpha=0$; il suit évidemment de là que $f''(\alpha)$ est une quantité négative.

On voit d'après cela que $f''(\alpha)$ est une fonction décroissante de α dont la plus grande valeur est egale a $f''(0)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{6}$

4. Après cette digression revenons au développement

de $f(\alpha)$. D'après une formule connue, nous pourrons écrire

$$\frac{\alpha}{e^\alpha-1}=1-\frac{\alpha}{2}.$$

R représentant, suivant que l'on voudra pousser le développement plus ou moins loin, ou la quantité

$$\frac{\alpha^2}{1.2}f''(\theta\alpha),$$

ou la quantité

$$\frac{\alpha^2 f''(0)}{2}+\ldots\ldots+\frac{\alpha^{2n}f^{2n}(0)}{1.2\ldots 2n}+\frac{\alpha^{2n+2}f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2\ldots(2n+2)};$$

c'est ce que l'on comprendra en se rappelant que R est une fonction paire de α : à peine est-il nécessaire d'avertir que θ représente d'une manière générale un certain nombre compris entre 0 et 1. Cette valeur de $f(\alpha)$ substituée dans celle de $\frac{du}{dx}$ fournit

$$\frac{du}{dx}=\int_0^\infty\frac{d\alpha}{\alpha}\left(e^{-\alpha}-e^{-\alpha x}+\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha x}-\mathrm{R}\,e^{-\alpha x}\right),$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (1)

$$\frac{du}{dx}=\log.x+\frac{1}{2x}-\int_0^\infty\frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha}.$$

Par conséquent

$$u=\mathrm{C}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.x-x+\int_0^\infty\frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha^2},$$

cette valeur de u est en même temps celle de

$\log.(1.2.3\ldots x)$. Nous prouverons plus tard que la constante C est égale à $\log.(\sqrt{2\pi})$.

5. On trouve aisément les limites de l'erreur que l'on commettrait en négligeant dans le second membre le terme

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha^2}:$$

à cause de

$$\mathrm{R} = \frac{\alpha^2 f''(\theta\alpha)}{2},$$

ce terme devient

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f''(\theta\alpha)\,d\alpha.$$

Il est donc essentiellement positif comme la fonction $f''(\theta\alpha)$. De plus, il est moindre que

$$\frac{1}{12}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,d\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{1}{12x},$$

puisque l'on a $f''(\theta\alpha) < \frac{1}{6}$.

Cette discussion nous montre qu'en désignant par μ un certain nombre compris entre 0 et 1, on peut poser

$$\log.(1.2.3\ldots x) = \mathrm{C} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log.x - x + \frac{\mu}{12x}.$$

6. Si l'on prend

$$\mathrm{R} = \frac{\alpha^2 f''(0)}{1.2} + \ldots + \frac{\alpha^{2n} f^{2n}(0)}{1.2\ldots 2n} + \frac{\alpha^{2n+2} f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2\ldots(2n+2)},$$

le terme

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha^2}$$

se présentera sous une autre forme ; il deviendra

$$\frac{f'(0)}{2x}+\ldots+\frac{f^{2n}(0)}{2n(2n-1)x^{2n-1}}+\int_0^{\infty}\frac{e^{-2x\alpha}\alpha^{2n}f^{2n+2}(\theta\alpha)d\alpha}{1.2\ldots(2n+2)},$$

et si l'on veut avoir une limite supérieure de la valeur absolue de l'intégrale dont il dépend, il suffira de remplacer $f^{2n+2}(\theta\alpha)$ par le maximum absolu M de $f^{2n+2}(\alpha)$, ce qui permettra d'effectuer l'intégration.

7. Pour déterminer la constante C, mettons l'équation

$$\log.(1.2.3..x)=C+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.x-x+\frac{\mu}{12x}$$

sous la forme

$$\log.1+\log.2+\log.3+\ldots+\log.x=C+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.x-x+\text{etc.}$$

le signe etc. désignant un terme qui s'annule quand $x=\infty$.

Nous en tirerons facilement

$$\log.1+\log.2+\log.3+\ldots+\log.2x=C+\left(2x+\frac{1}{2}\right)\log.2x-2x+\text{etc.}$$

A cause de

$$\log.2+\log.4+..+\log.2x=x\log.2+\log.1+\log.2+\ldots+\log.x,$$

nous aurons aussi

$$\log.2+\log.4+\log.6+..+\log.2x=C+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.x+x\log.2-x+\text{etc.}$$

Retranchant cette équation de celle qui donne la somme des logarithmes des nombres naturels depuis 1 jusqu'à $2x$, on obtient

$$\log.1+\log.3+5+\ldots+\log.(2x-1)=x\log.x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.2-x+\text{etc.}$$

Retranchant à son tour le double de cette nouvelle équation du double de la précédente, il vient enfin

$$2\log.2+2\log.4+2\log.6+\ldots+2\log.(2x-2)+\log.2x$$
$$-2\log.1-2\log.3-2\log.5-\ldots-2\log.(2x-3)-2\log.(2x-1)$$
$$=2C-2\log.2+\text{etc.}$$

de sorte qu'à l'aide de la formule de Wallis citée plus haut, on trouve en faisant x infini,

$$\log.\pi-\log.2=2C-2\log.2,$$

et par suite

$$C=\frac{1}{2}(\log.\pi+\log.2)=\log.(\sqrt{2\pi}).$$

Nous devons dire en terminant que M. Binet a traité la question précédente et plusieurs autres du même genre dans un mémoire considérable destiné au *Journal de l'École polytechnique.*

V.

Sur une application singulière de la théorie des intégrales doubles à la démonstration d'un théorème d'algèbre

En désignant par ρ et ω les coordonnées polaires d'un point pris dans un plan fixe horizontal, et par z une fonction réelle et déterminée de ρ et ω, qui ne devient pas infinie entre les limites 0 et R de ρ, 0 et 2π de ω, on voit que les deux intégrales doubles

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} z d\omega, \quad \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho$$

sont nécessairement égales entre elles, puisqu'elles représentent toutes deux un même volume ; savoir, le volume compris entre le plan fixe, la surface cylindrique droite ayant pour base un cercle de rayon R tracé autour de l'origine des coordonnées prise pour centre, et une autre surface dont l'ordonnée verticale est pour chaque système de valeurs des deux quantités ρ et ω, représentée par z. Or, on peut de là conclure, avec M. Gauss, que le premier membre de toute équation algébrique à coefficients réels

$$z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \ldots + Lz + M = 0$$

est divisible soit par un facteur réel du premier degré $z \mp \rho$, soit par un facteur réel du second degré $z^2 - 2\rho z \cos.\omega + \rho^2$, en sorte que cette équation a toujours au moins une racine réelle ou imaginaire, savoir $\pm \rho$ ou $\rho(\cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega)$.

En d'autres termes, on peut prouver qu'il existe tou-

jours des valeurs réelles des deux quantités ρ et ω satisfaisant à la fois aux deux équations

$$\rho^m \cos. m\omega + A\rho^{m-1}\cos.(m-1)\omega + \ldots + L\rho\cos.\omega + M = 0,$$
$$\rho^m \sin. m\omega + A\rho^{m-1}\sin.(m-1)\omega + \ldots + L\rho\sin.\omega = 0.$$

Désignons en effet par t et u les premiers membres de ces équations, puis posons

$$t' = \frac{du}{d\omega} = \rho\frac{dt}{d\rho},\quad u' = -\frac{dt}{d\omega} = \rho\frac{du}{d\rho},$$
$$t'' = \frac{du'}{d\omega} = \rho\frac{dt'}{d\rho},\quad u'' = -\frac{dt'}{d\omega} = \rho\frac{du'}{d\rho}.$$

Soit R une quantité positive quelconque, mais plus grande que la plus grande des quantités

$$mA'\sqrt{2},\ \sqrt{mB'\sqrt{2}},\ \sqrt[3]{mC'\sqrt{2}},\ldots\ldots \sqrt[m]{mM'\sqrt{2}}$$

où A′, B′, C′,... M′ désignent les valeurs absolues des coefficients A,B,C,...M. Cela étant, je dis que si l'on pose $\rho = R$, la somme $tt' + uu'$ aura une valeur positive. Pour le montrer, observons d'abord que les quatre quantités suivantes

$$R^m\cos.\frac{\pi}{4} + AR^{m-1}\cos.\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right) + \ldots + M\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$
$$R^m\sin.\frac{\pi}{4} + AR^{m-1}\sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right) + \ldots + M\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$
$$mR^m\cos.\frac{\pi}{4}(+m-1)AR^{m-1}\cos.\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right) + \ldots + LR\cos.\left(\frac{\pi}{4}+(m-1)\omega\right)$$
$$mR^m\sin.\frac{\pi}{4}+(m-1)AR^{m-1}\sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right) + \ldots + LR\sin.\left(\frac{\pi}{4}+(m-1)\omega\right)$$

que je nommerai respectivement T, U, T′, U′, sont toutes >0 : on le prouve, par exemple, pour la première, en décomposant T sous cette forme

$$\frac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}\left[R + mA\sqrt{2}\cos.\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)\right]$$
$$+\frac{R^{m-2}}{m\sqrt{2}}\left[R^2 + mB\sqrt{2}\cos.\left(\frac{\pi}{4}+2\omega\right)\right]$$
$$+\frac{R^{m-3}}{m\sqrt{2}}\left[R^3 + mC\sqrt{2}\cos.\left(\frac{\pi}{4}+3\omega\right)\right]$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

et en se rappelant ce que l'on a dit ci-dessus de la grandeur de R. Une démonstration semblable s'applique aux trois autres sommes U, T', U'.

Or, pour $\rho = R$, on a

$$t = T\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right) + U\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$
$$u = T\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right) - U\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$
$$t' = T'\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right) + U'\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$
$$u' = T'\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right) - U'\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right),$$

et de là résulte $tt' + uu' = TT' + UU'$: donc $tt' + uu'$ est > 0. On peut observer en passant que nos équations donnent en outre $t^2 + u^2 = T^2 + U^2$.

Maintenant on peut prouver le théorème qui fait l'objet de cette note ; savoir qu'*entre les limites* $\rho = 0$, $\rho = R$, $\omega = 0$, $\omega = 2\pi$, *il existe certaines valeurs de* ω *et de* ρ *pour lesquelles on a à la fois* $t = 0$, $u = 0$. Car, si l'on n'admet pas ce théorème, il faudra en conclure que la fraction

$$z = \frac{(t^2+u^2)(tt''+uu'') + (tu'-ut')^2 - (tt'+uu')^2}{\rho(t^2+u^2)^2}$$

ne deviendra pas infinie entre les limites citées, et que, par suite, on aura

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} z d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho.$$

Or

$$\int z d\omega = \frac{tu' - ut'}{\rho(t^2 + u^2)},$$

comme on le vérifie aisément par la différentiation : de plus, t, u, t', u', reprennent les mêmes valeurs aux deux limites 0 et 2π : par suite, on a

$$\int_0^{2\pi} z d\omega = 0,$$

en sorte que la première de nos deux intégrales doubles se réduit à zéro. Mais la seconde est au contraire essentiellement >0. En effet, si l'on intègre d'abord par rapport à ρ, il vient

$$\int z d\rho = \frac{tt' + uu'}{t^2 + u^2}:$$

d'où

$$\int_0^R z d\rho = \frac{TT' + UU'}{T^2 + U^2},$$

et partant

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{(TT' + UU') d\omega}{T^2 + U^2},$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho = \text{une quantité positive},$$

puisque l'élément

$$\frac{(TT'+UU')d\omega}{T^2+U^2}$$

est essentiellement positif. Donc l'équation

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} z d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho$$

est impossible ; donc aussi la fraction z devient infinie une ou plusieurs fois, et par suite t et u s'annulent ensemble pour des valeurs réelles de ρ et ω. C, Q, F, D.

Si l'on pose log. $\rho=\theta$ ou $\rho=e^\theta$, on voit de suite que t et u sont les deux dérivées par rapport à ω et θ d'une même intégrale

$$\varphi=\frac{e^{m\theta}\sin.m\omega}{m}+\frac{Ae^{(m-1)\theta}\sin.(m-1)\omega}{m-1}+\ldots\ldots+Le^\theta\sin.\omega+M\omega$$

de l'équation $\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}+\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}=0$: d'après un théorème démontré par M. Lamé dans le *Journal de l'École polytechnique*, cette équation sera donc aussi satisfaite par $\varphi=\log.\sqrt{t^2+u^2}$. Ainsi les deux quantités

$$\frac{d^2\log.\sqrt{t^2+u^2}}{d\theta^2},\ -\frac{d^2\log.\sqrt{t^2+u^2}}{d\omega^2}$$

sont égales entre elles : leur valeur commune est précisément celle du produit ρz.

—

VI.

Sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles.

Soit

(1) $$f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$$

une équation différentielle de l'ordre n, y', ... $y^{(n)}$ étant les dérivées successives de y. L'intégrale complète de cette équation (intégrale que je suppose connue) contiendra n constantes arbitraires $a, b, \ldots c$, et sera de la forme $y = F(x, a, b, \ldots c)$ ou plutôt $\pi(x, y, a, b, \ldots c) = 0$. Maintenant différentions par rapport à a les deux membres de l'équation (1), et représentons par u la dérivée $\frac{dy}{da}$. Il nous viendra

(2) $$\frac{df}{dy}.u + \frac{df}{dy'}.\frac{du}{dx} + \ldots + \frac{df}{dy^{(n)}}.\frac{d^n u}{dx^n} = 0.$$

On aurait eu la même équation si, au lieu de poser $\frac{dy}{da} = u$, on avait posé $\frac{dy}{db} = u$ ou $\frac{dy}{dc} = u$. Donc les dérivées de y prises par rapport aux n constantes $a, b, \ldots c$, représentent autant d'intégrales particulières de l'équation linéaire (2); de sorte qu'en général l'intégrale complète de cette équation (2) est

$$u = A\frac{dy}{da} + B\frac{dy}{db} + \ldots + C\frac{dy}{dc},$$

A, B,... C étant des constantes arbitraires.

Ce théorème, aussi simple que remarquable, est dû à M. Jacobi. Il s'étend de lui-même à un système quelconque d'équations différentielles simultanées. Pour l'appliquer à un exemple, considérons le cas particulier où l'équation (1) est de la forme

$$y''-\varphi(y)=0\,;$$

cette équation peut alors s'intégrer, car, en la multipliant par $2dy$, elle nous donne

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\varphi(y)dy=0,$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=a+2\int\varphi(y)dy,$$

et par suite

$$x=b+\int\frac{dy}{\sqrt{a+2\int\varphi(y)\,dy}}. \tag{3}$$

En vertu de cette dernière équation, y est une fonction de x, a, b. Or, il suit du théorème de M. Jacobi que l'équation linéaire $\frac{d^2u}{dx^2}=\varphi'(y)\,u$ où $\varphi'(y)$ désigne la dérivée de y, aura une intégrale complète de la forme $u=\mathrm{A}\,\frac{dy}{da}+\mathrm{B}\,\frac{dy}{db}$, quelle que soit la fonction φ.

FIN.

PARIS.—IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odeon.

